

① Классификация урн с ЧП II порядка

1

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y), u_{xx}(x, y), u_{xy}(x, y), u_{yy}(x, y)) = 0 \quad (1)$$

Найти $u(x, y)$.

Ур-е линейно относительно производных.

$$a_{11}(x, y) u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y) u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y) u_{yy}(x, y) + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (2)$$

• Квадратичное

Если a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят от x, y, u, u_x, u_y

• Лин ур-е с ЧП II порядка для $u(x, y)$:

$$a_{11}(x, y) u_{xx} + 2a_{12}(x, y) u_{xy} + a_{22}(x, y) u_{yy} + b_1(x, y) u_x + b_2(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y)$$

Если $f(x, y) = 0 \Rightarrow$ однородное

Если $f(x, y) \neq 0 \Rightarrow$ неоднородное

• в ур-е (2) в (1) (x_0, y_0) :

1) гиперболический тип

$$a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0) \cdot a_{22}(x_0, y_0) > 0$$

2) эллиптический тип

$$a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0) \cdot a_{22}(x_0, y_0) < 0$$

3) параболический тип

$$a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0) \cdot a_{22}(x_0, y_0) = 0$$

Примеры:

$$1) u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t)$$

$$a^2 u_{xx}(x, t) - u_{tt}(x, t) = 0$$

$\Rightarrow$ гиперболич.

$$a_{11} = a^2$$

$$a_{22} = -1$$

(ур-е колеб.)

$$2) u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

$a_{11} = 1, a_{22} = 1 \Rightarrow$ эллиптический
(уравнение Лапласа)

$$3) u_t = a^2 u_{xx} - \text{параболический}$$

Если у уравнения разный тип в разных (-) областях $\Rightarrow$ смешанный тип

② Вывод уравн теплопроводности в нр-ве.

2.1

А в 3-х мерном нр-ве некоторое тело, производящее тепло.

в нек мом. в р

И его темп в нек (.) $M(x, y, z) : u(x, y, z, t)$
 $u(M, t)$.

$$\text{// grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = (\text{grad } u, \vec{e})$$

$$\text{// Теор. о среднем: } \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in [a, b]$$

$$\text{// } \iiint_{\Omega} f(M) d\omega_M = f(M^*) \cdot V_{\Omega}$$

- средн з

// Формула Остроградского-Гаусса:

$$\vec{A} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

$$\iint_{\Sigma} (\vec{A} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{A} \cdot d\omega, \quad \text{div } \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

- $F(x, y, z)$ - плотность источника тепла
- $\rho(x, y, z)$ - плотность
- $c(x, y, z)$ - теплоёмкость

Закоу Фурье: $\vec{\omega}$ - вектор теплового потока

$$\vec{\omega} = -K(x, y, z) \cdot \text{grad } u, \quad K(x, y, z) - \text{коэфф. темп-ты.}$$

$$\text{] } t_1 < t_2. \quad Q(t) = \iiint_{\Omega} c(M) \rho(M) u(M, t) d\omega - \text{кол-во тепла в мом. в р. } t.$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} [c(x, y, z) \rho(x, y, z) \cdot u(x, y, z, t_2) - c(x, y, z) \rho(x, y, z) \cdot u(x, y, z, t_1)] d\omega \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Sigma} (\vec{\omega} \cdot \vec{n}) d\sigma dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) d\omega dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} [c(M) \rho(M) \cdot u(M, t_2) - c(M) \rho(M) u(M, t_1)] d\omega = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Sigma} (\vec{\omega} \cdot \vec{n}) d\sigma dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) d\omega dt \end{aligned}$$

т.к. изменение кол-ва тепла происходит из-за притока (оттока) тепла извне и действия нек. внутр. источников.

Ф-но Лапласа:

2.2

$$u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t^*) (t_2 - t_1)$$

$$u \in C^{2,1}[\Omega \times [t_1, t_2]]$$

$$t^* \in [t_2 - t_1]$$

Применение формулы Лапласа:

~~уравнение Лапласа~~

$$\iiint_{\Omega} C(M) p(M) \frac{\partial u}{\partial t}(M, t_3) (t_1 - t_2) = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_{\Sigma} (\vec{\omega} \cdot \vec{n}) d\sigma \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(M, t) d\omega dt$$

$$t_3 \in [t_1, t_2]$$

Применение формулы Остроградского к ф. Лапласа и к ф. Грина:

$$\iiint_{\Omega} C(M) p(M) \frac{\partial u}{\partial t}(M, t_3) (t_1 - t_2) = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\omega} d\omega \right]_{t=t_4} + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(M, t_5) d\omega dt$$

$$t_3, t_4, t_5 \in [t_1, t_2]$$

$$\iiint_{\Omega} C(M) p(M) \frac{\partial u}{\partial t}(M, t_3) (t_1 - t_2) = - \iiint_{\Omega} d\vec{\omega} \Big|_{t=t_4} d\omega (t_2 - t_1) + F(M_2, t_5) \cdot V_{\Omega} (t_2 - t_1)$$

$$C(M_1) p(M_1) \frac{\partial u}{\partial t}(M_1, t_3) \cdot V_{\Omega} \cdot (t_1 - t_2) = - \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\omega} \Big|_{t=t_4} d\omega (t_2 - t_1) + F(M, t_5) \cdot V_{\Omega} (t_2 - t_1) \quad \textcircled{=}$$

$$\text{II} - \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\omega} \Big|_{t_0=t_4} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} (k \cdot \operatorname{grad} u) d\omega \Big|_{t=t_4} =$$

$$\text{II} = \operatorname{div} (k \cdot \operatorname{grad} u) \Big|_{\substack{M=M_3 \\ t=t_4}} \cdot V_{\Omega}$$

$$\textcircled{=} \operatorname{div} (k(M) \operatorname{grad} u) \Big|_{\substack{t=t_4 \\ M=M_3}} V_{\Omega} + F(M_2, t_5) \cdot V_{\Omega}$$

$$t_3, t_4, t_5 \in [t_1, t_2]$$

$$M_1, M_2, M_3 \in \Omega$$

$$\boxed{C(M) p(M) \frac{\partial u}{\partial t}(M, t) = \operatorname{div} (k(M) \operatorname{grad} u(M, t)) + F(M, t)} - \text{уравнение паратензорности}$$

$$c(M)p(M)\frac{\partial u}{\partial t}(M,t) = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u(M,t)) + F(M,t) \quad \boxed{2.3}$$

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u) = k(x,y,z) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k(x,y,z) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k(x,y,z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

c, p, k - постоянные

$$cp \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u + F(x,y,z,t)$$

$$\underline{u_t = a^2 \Delta u + F_1(x,y,z,t)} \quad a^2 = \frac{k}{cp}, \quad F_1 = \frac{F}{cp}$$

уравнение диффузии, если $u(x,y,z,t)$ - концентрация вещества

③ Уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной.

3.1

Постановка основных задач.

Найдем или опишем сечение

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad t=0 - \text{нач. момент времени.}$$

$a, f(x, t)$ - заданы.

• $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$ - нач. условие

• краевые (граничные условия):

1) I кр. усл. $u(0, t) = \mu(t)$

2) II кр. усл.: $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = D(t)$

3) III кр. усл.: $u(0, t) + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = Q(t)$

I кр. задача (дано в начале u)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

II кр. задача (дано в начале u_x)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 \leq x \leq l \\ u_x(0, t) = D_1(t) \\ u_x(l, t) = D_2(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Задача на полуинфинитной области

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x > 0, 0 < t \leq T \\ u(0, t) = \mu(t), & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x > 0 \end{cases}$$

Задача Коши (на прямой)

3.2

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ 0 \leq t \leq T \end{matrix}$$

④ Метод разделения переменных
для доказательства $\exists$ решения I кр. задачи
для ур-ие теплопроводности.

4.1

I кр. зад.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2)$$

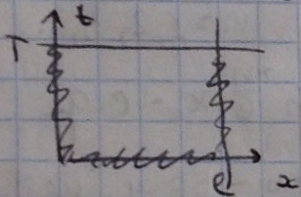
$$\begin{cases} u(l, t) = \mu_2(t) & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (4) \quad u(x, t) = ?$$

$a, \mu_1, \mu_2, \varphi(x)$
даны

Что подразумевается под решением данной задачи!

Введём мн-во: $Q_{ET} = \{ (x, t) : 0 < x < l, 0 \leq t \leq T \}$



$$u \in C^{2,1}(\bar{Q}_{ET})$$

Опр. Ф-ия $u(x, t)$ — решение задачи (1)-(4), если

1) $u \in C[\bar{Q}_{ET}]$ (сверивает мн-во соот- поведение ф-ии внутри пр-ка и на границе)

2) $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_{ET})$

3) $u(x, t)$ удовлетворяет (1)-(4)

Дополнительные условия разрешимости:

$$\mu_1, \mu_2 \in C[0, T], \varphi \in C[0, l],$$

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \mu_2(l) = \varphi(l) - \text{условие}$$

согласованности

$\exists$ решение ф. задачи. Метод разд. перемен. (метод Фурье)

$$(1) \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u(0, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u(l, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Хотим построить q -ую, удове. (1)-(4).

4.2

1. Ищем решение в виде: ...

$$S(x, t) = X(x) T(t) \Rightarrow \text{подст. в (1)}$$

$$X(x) T'(t) = a^2 X''(x) T(t) \quad | : a^2 X T$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (\text{т.к. слева от } t, \text{ справа от } x, \text{ это возм. только если константа})$$

↓ ↓

$$\begin{aligned} T'(t) + \lambda a^2 T(t) &= 0 \quad 0 \leq t \leq \tau \\ T'_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) &= 0 \\ T_n(t) &= \tilde{C}_n \cdot \exp\left[-\left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 a^2 t\right] \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \quad 0 \leq x \leq e \\ X(0) &= 0 \\ X(e) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Решаем задачу Штурма-Лиувилля

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 - \text{с.зн.} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$X_n(x) = \tilde{C}_n \cdot \sin \frac{\pi n}{e} x - \text{с.р.}$$

$$\Rightarrow S_n(x, t) = C_n \cdot X_n(x) T_n(t) \quad - \text{все эти } q\text{-ую-реш. негрив упр-е и удове. (1), (2), (3)}$$

$$2. u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot X_n(x) T_n(t)$$

Считаем, что $\tilde{C}_n$ и $\tilde{C}_n = 1$

$$\text{Записываем то, что нам надо: } \varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{e} x$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{e} x. \quad \text{Хотим подобрать } C_n$$

Умножаем на $\sin \frac{\pi m}{e} x$ и $\int_0^e$

$$\Rightarrow \int_0^e \sin \frac{\pi m}{e} x \varphi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^e \sin \frac{\pi m}{e} x \sin \frac{\pi n}{e} x dx$$

$$\text{т.к. } \int_0^e \sin \frac{\pi m}{e} x \cdot \sin \frac{\pi n}{e} x dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{e}{2} & n = m \end{cases} \Rightarrow \text{ост. только } n = m$$

$$\int_0^e \sin \frac{\pi m}{e} x \varphi(x) dx = C_m \cdot \frac{e}{2} \Rightarrow C_n = \frac{2}{e} \int_0^e \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{e} s ds \quad n=1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e} \int_0^e \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{e} s ds \cdot \sin \frac{\pi n}{e} x \cdot \exp\left[-\left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 a^2 t\right] \quad (5)$$

$\varphi \in C^1[0; l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ (это гарантируется усл-ие согласования)

Тогда функция $u(x, t)$, определённая (5) такова, что:

$u(x, t) \in C[\bar{Q}_{ET}]$, $u(x, t) \in C^{2,1}[Q_{ET}]$, $u(x, t)$ удовн. (1)-(4).

► Что мы хотим. У нас есть ряд (5). Можно манипулир. только коэф.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t \right\}.$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds = \frac{2}{l} \varphi(s) \cdot \left(-\frac{l}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{l} s \Big|_0^l + \frac{2}{\pi n} \int_0^l \cos \frac{\pi n}{l} s \varphi'(s) ds$$

• Док-м, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|$ сх-ся

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{2}{\pi n} \tilde{\varphi}'_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{\varphi}'_n| \leq C \Rightarrow$$

$$|\varphi_n| \leq \frac{2}{\pi n} |\tilde{\varphi}'_n| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} |\tilde{\varphi}'_n|^2$$

т.к. $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

Из ряда Фурье:

Возьмем сист. ф-ий $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$, на $[0, l]$,
 можем раскл в ряд Фурье по этим ф-иям
 $F(x) : F_n = \int_0^l f(s) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} s ds$
 коэф. Фурье
 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x = f(x)$
 если ряд сх. раскл на $[0, l]$

т.е. мы ~~должны~~ можем пров. оценку

какого ряд $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|$ сх-ся

• Док-м, что $u(x, t) \in C[\bar{Q}_{ET}]$

$$|\varphi_n \cdot \frac{\sin \frac{\pi n}{l} x}{\sin \frac{\pi n}{l} x} \frac{T_n(t)}{\exp \dots}| \leq |\varphi_n| \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}_{ET}$$

з) по n вейф-функций (5) сх-ся $\Rightarrow u(x, t) \in C[\bar{Q}_{ET}]$

• Док-м, что $u(x, t) \in C^{2,1}[Q_{ET}]$ (тут нет 3-х условий)

Каждо док-во, что $\exists$ невр u_t и u_{xx} $1 \leq t \leq l$, $0 < x < l$

Применим ∇ к диф-ту: чтобы (5) были диф-ми, надо, чтобы мы были диф-ми $\Rightarrow$ диф-м и док-м, что

ряд u про-ув. сх-ся

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \frac{\partial}{\partial t} u_n(x, t)$$

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| = |\varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot (-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \exp \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t \right\})| \leq \boxed{L \cdot L}$$

$$\leq |\varphi_n| \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t_0 \right\}$$

$\forall (x, t) \in Q_{\text{ext}}^{+0} \Rightarrow \text{н.р. Выводим} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \right| = |\varphi_n \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot (-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2) \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t \right\}| \leq$$

$$\leq |\varphi_n| \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t \right\} \text{ аналогично}$$

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

• $(u_n)_t = a^2 (u_n)_{xx}$ это верно. Пока смотрим и видим это

• Док-ка (u):

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \varphi(s) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} s ds \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Видно, что у нас есть предел

$$Q_{\text{ext}} = \{(x, t) \mid 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$$

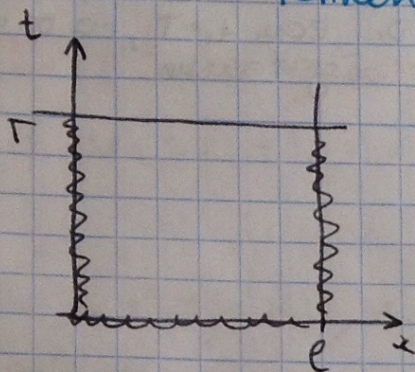
Аналогично $\bar{Q}_{\text{ext}}$, если $\bar{Q}_{\text{ext}}$ еще не определено

$$u \in C^{2,1}(\bar{Q}_{\text{ext}})? \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Уравн. теплопроводности, $\varphi \in C^2$, $\varphi(x) = u(x, 0)$ это $\bar{Q}_{\text{ext}}$ должно выполняться как
 $\varphi'(0) = 0$ нужно как
периодичность

⑤ Принцип максимума для уравнения теплопроводности.

5.1



$$Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$$

$$\bar{Q}_T$$

$$\Gamma = \bar{Q}_T \setminus Q_T$$

$\nabla \quad] \quad u(x, t) \in C[\bar{Q}_T]$

$$u(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T) \quad \text{и} \quad u_t(x, t) = a^2 u_{xx} \quad (x, t) \in Q_T$$

Тогда $\max_{(x,t) \in \bar{Q}_T} u(x, t) = \max_{(x,t) \in P} u(x, t)$

$$\min_{(x,t) \in \bar{Q}_T} u(x, t) = \min_{(x,t) \in P} u(x, t)$$

► От противного.

$] \quad M = \max_{\Gamma} u(x, t) \quad \text{и} \quad \exists (x_0, t_0) \in Q_T : u(x_0, t_0) = \max_{\bar{Q}_T} u(x, t) = M + \varepsilon$

Введем $\delta(x, t) = u(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0)$

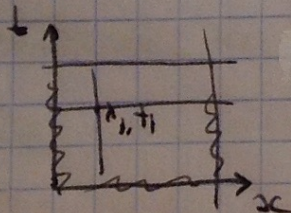
$$\max_{\Gamma} \delta(x, t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad t_0, t \in [0, T] \Rightarrow \max |t - t_0| \leq T \Rightarrow \text{смысл} \neq /$$

$$\delta(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) - 0 = M + \varepsilon.$$

т.к. $u(x, t) \in C[\bar{Q}_T] \Rightarrow \delta(x, t) \in C[\bar{Q}_T]$ и здесь тоже для принципа максимума $M + \varepsilon$

$$\delta(x_1, t_1) = \max_{\bar{Q}_T} \delta(x, t) \geq M + \varepsilon \Rightarrow \text{эта точка должна лежать внутри}$$

(т.к. если 1) в кот. $M + \varepsilon$ и из P он не в δ



т.е. $0 < x_1 < l$
 $0 < t_1 \leq T$

в этой 1) $\delta(x, t)$ достигает макс,

$$\delta(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$$

$$B(.) \max: \begin{cases} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t}(x_1, t_1) \geq 0 \end{cases}$$

5.2

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x_1, t_1) = 0, \text{ если } t_1 \in (0, T) \\ \text{если } t_1 = T, \text{ то } 0 \text{ не достигается.}$$

$$\text{Для } u(x, t): \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t_1) = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x_1, t_1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_1) = \frac{\partial S}{\partial t}(x_1, t_1) + \frac{\varepsilon}{2T}$$

$$\text{те получим: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_1) > 0 \quad \left(\frac{\partial S}{\partial t}(x_1, t_1) \geq 0 + \frac{\varepsilon}{2T} > 0 \right)$$

$\Rightarrow$ в (x_1, t_1) ур-е тепло-ти не выполняется.

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx} \Rightarrow W \text{ у предполож. } \Rightarrow \text{ з.г.д.}$$

Для min аналогично, или же $v(x, t) = -u(x, t) \Rightarrow$ или $u(x, t)$ превратится в max $v(x, t)$.

Замечание Если бы мы взяли на $[a, b]$, а не на (a, b) , то можно бы не учитывать

Физик. интерпретация

$$\text{I ф.з.д.} \quad \mu_1(t) \left[\begin{array}{c} u_t = a^2 u_{xx} \\ \varphi(x) \end{array} \right] \mu_2(t)$$

температура внутри стержня в t мом. в р. не м.д. больше, чем наг. и концы (по ф.з.д.) т.е. нет ист. темп.

6 Единственность и устойчивость решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности

6.1

Т (!-ти решение I кр. з)

$\exists u_i(x, t), i=1, 2: u_i \in C[\bar{Q}_{\text{тер}}], u_i \in C^{2,1}[Q_{\text{тер}}],$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(x, t) \quad (x, t) \in Q_{\text{тер}}$$

$$u_i(0, t) = \mu_1(t), u_i(l, t) = \mu_2(t), u_i(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l$$

Тогда $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в $\bar{Q}_{\text{тер}}$.

Введём вспомогатель $S(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$

$$\Rightarrow S \in C[\bar{Q}_{\text{тер}}], S \in C^{2,1}[Q_{\text{тер}}]$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, t), (x, t) \in Q_{\text{тер}}$$

$$S(0, t) = 0$$

$$S(l, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

$$S(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq l$$

$S(x, t)$ грав. Если уст. принцип макс значение $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \max_{\bar{Q}_{\text{тер}}} S(x, t) = \max_{\Gamma} S(x, t) = 0$$

$$\min_{\bar{Q}_{\text{тер}}} S(x, t) = \min_{\Gamma} S(x, t) = 0$$

(рассмотрим на $\bar{Q}_{\text{тер}}$ $\nabla^2 S = 0$, а там все 0)

$$\Rightarrow \text{т.к. } S(x, t) \in C[\bar{Q}_{\text{тер}}], \min = \max = 0 \Rightarrow S(x, t) = 0 \text{ в } \bar{Q}_{\text{тер}}$$

$$\Rightarrow u_1(x, t) = u_2(x, t) \text{ в } \bar{Q}_{\text{тер}}$$

Устойчивость решение I кр. з.

Исх. данные: $\mu_1(t), \mu_2(t), \varphi(x)$

Сильно ли чув. решение, если мы изменим исходные данные?

Вок-м вспомогательную задачу:

Лемма $\exists u_i(x, t) i=1, 2: u_i \in C[\bar{Q}_{\text{тер}}], u_i \in C^{2,1}[Q_{\text{тер}}]$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(x, t), (x, t) \in Q_{\text{тер}}$$

Тогда если $u_1(x, t) \geq u_2(x, t)$ $(x, t) \in \Gamma \Rightarrow u_1(x, t) \geq u_2(x, t)$ в $\bar{Q}_{\text{тер}}$

► Введём вспомогательную функцию

$$S(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

6.2

$$\Rightarrow S(x, t) \in C[\overline{Q_{\text{кр}}}]$$

$$S(x, t) \in C^{2,1}[\overline{Q_{\text{кр}}}]$$

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, t) \text{ в } Q_{\text{кр}}$$

$$u \text{ и } S(x, t) \geq 0 \text{ на } \Gamma$$

⇐

Для $S(x, t)$ справедливы принципы макс-и мин-а
 $\min_{\overline{Q_{\text{кр}}}} S(x, t) = \min_{\Gamma} S(x, t) \geq 0 \Rightarrow S(x, t) \geq 0 \text{ на } \overline{Q_{\text{кр}}}$

Принцип максимума Если мин с одной стороны функции достигается, то и внутри будет соотв.

□ (устойчивость)

$$] u_i(x, t) \quad i=1, 2:$$

$$u_i \in C[\overline{Q_{\text{кр}}}]$$

$$u_i \in C^{2,1}[\overline{Q_{\text{кр}}}]$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(x, t) \quad (x, t) \in Q_{\text{кр}}$$

$$u_i(0, t) = \mu_{1i}(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_i(l, t) = \mu_{2i}(t) \quad (\text{т.е. две функции от } t \text{ и } y_{\text{кр}})$$

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\text{Погда } \max_{\overline{Q_{\text{кр}}}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| = \max_{\overline{Q_{\text{кр}}}} |u_{11}(t) - u_{12}(t)|,$$

или то же, не суть важно

$$\max_{\overline{Q_{\text{кр}}}} |u_{21}(t) - u_{22}(t)|, \max_{\overline{Q_{\text{кр}}}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

► Введём $S(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \Rightarrow$
 $S \in C[\overline{Q_{\text{кр}}}]$
 $S \in C^{2,1}[\overline{Q_{\text{кр}}}]$
 $S_t = a^2 S_{xx}, (x, t) \in Q_{\text{кр}}$

В уст. $] \max_{\overline{Q_{\text{кр}}}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$ это не верно

$$|S(x, t)| \leq \varepsilon \quad (x, t) \in \Gamma$$

Введём 2 ф-ии.

$$U^+(x, t) = \varepsilon$$

$$U^-(x, t) = -\varepsilon$$

$$\Rightarrow U^{\pm} \in C[\overline{Q_{\text{кр}}}]$$

$$U^{\pm} \in C^{2,1}[\overline{Q_{\text{кр}}}]$$

$$U_t^{\pm} = a^2 U_{xx}^{\pm} \quad (x, t) \in Q_{\text{кр}}$$

• А напу

6.3

$$S(x,t) \text{ и } U^+(x,t)$$

Для S и U^+ выполнены условия леммы $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S(x,t) \leq U^+(x,t) = \varepsilon \text{ и } P \Rightarrow \text{по лемме}$$

$$S(x,t) \leq U^+(x,t) = \varepsilon \text{ и } \overline{Q_{\text{ст}}}$$

• А напу

$$S(x,t) \text{ и } U^-(x,t)$$

~~Аналогично~~ Для S и U^- — // — $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\varepsilon \leq S(x,t) \text{ и } P \Rightarrow S(x,t) > U^-(x,t) \text{ и } P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по лемме } -\varepsilon = U^-(x,t) \leq S(x,t) \text{ и } \overline{Q_{\text{ст}}}$$

$$\Rightarrow \text{получим } -\varepsilon \leq S(x,t) \leq \varepsilon \text{ и } \overline{Q_{\text{ст}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |S(x,t)| \leq \varepsilon \quad (x,t) \in \overline{Q_{\text{ст}}}$$

$$\Rightarrow \text{если } |S(x,t)| \leq \varepsilon \Rightarrow \max_{\overline{Q_{\text{ст}}}} |S(x,t)| = \max_{\overline{Q_{\text{ст}}}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \varepsilon$$

т.е. мы докажем, что $\Leftrightarrow$ т.е., что $|u_1 - u_2|$ и все u_i $\leq$,
если u_i $P \Rightarrow$

⑦ Единственность решения общей краевой задачи для уравн-ти на отрезке.

7.1.

Общая краевая задача

$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t) & (x, t) \in Q_{\text{кр}} \\ \alpha_1 u(0, t) - \beta_1 u_x(0, t) = Q_1(t) \\ \alpha_2 u(l, t) + \beta_2 u_x(l, t) = Q_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ \alpha_i \geq 0 \\ \beta_i \geq 0 \\ i = 1, 2 \end{matrix}$$

! -ти решение общей краевой задачи.

$\exists u_i(x, t), i = 1, 2 : u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x} \in C[\bar{Q}_{\text{кр}}]$

$$u_i \in C^{2,1}[\bar{Q}_{\text{кр}}]$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = 0 \quad (x, t) \in Q_{\text{кр}}$$

$$\alpha_1 u_i(0, t) - \beta_1 \frac{\partial u_i}{\partial x}(0, t) = Q_1(t)$$

$$\alpha_2 u_i(l, t) + \beta_2 \frac{\partial u_i}{\partial x}(l, t) = Q_2(t)$$

$$u_i(x, 0) = \varphi(x).$$

Говорим $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в $\bar{Q}_{\text{кр}}$.

► 1) $\delta(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta(x, t), \delta_x \in C[\bar{Q}_{\text{кр}}]$$

$$\delta(x, t) \in C^{2,1}[\bar{Q}_{\text{кр}}]$$

$$\begin{cases} \delta_t = a^2 \delta_{xx} & (x, t) \in Q_{\text{кр}} \\ \alpha_1 \delta(0, t) - \beta_1 \delta_x(0, t) = 0 \\ \alpha_2 \delta(l, t) + \beta_2 \delta_x(l, t) = 0 \\ \delta(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

2) Полагая $u_1 = u_2 = 2\delta$

$$\Rightarrow 2\delta \cdot \delta_t = 2a^2 \delta \cdot \delta_{xx} \quad \text{берем} \int_0^l \int_0^t$$

$$\int_0^l \int_0^t 2\delta(x, \tau) \delta_\tau(x, \tau) d\tau dx = 2a^2 \int_0^l \int_0^t \delta(x, \tau) \delta_{xx}(x, \tau) d\tau dx$$

поменяв местами

$$\int_0^e \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} (S(x, \tau))^2 d\tau dx = 2a^2 \int_0^e$$

7.2

$$\int_0^e \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} (S(x, \tau))^2 d\tau dx = 2a^2 \int_0^t \left[S(x, \tau) S_x(x, \tau) \Big|_0^e - \int_0^e (S_x(x, \tau))^2 dx \right] d\tau$$

$$\int_0^e [S^2(x, e) - S^2(x, 0)] dx + 2a^2 \int_0^t \int_0^e (S_x(x, \tau))^2 dx d\tau - 2a^2 \int_0^t S(e, \tau) S_x(e, \tau) d\tau + 2a^2 \int_0^t S(0, \tau) S_x(0, \tau) d\tau = 0$$

$$\underbrace{\int_0^e S^2(x, e) dx}_{(+)} + \underbrace{2a^2 \int_0^t \int_0^e (S_x(x, \tau))^2 dx d\tau}_{(+)} - \underbrace{2a^2 \int_0^t S(e, \tau) S_x(e, \tau) d\tau}_{\geq 0 \text{ тк:}} + \underbrace{2a^2 \int_0^t S(0, \tau) S_x(0, \tau) d\tau}_{\leq 0 \text{ тк:}} = 0$$

• $-S(e, t) S_x(e, t) \geq 0$ — это хотим доказать

Используем кр. условие:

I случай: $\beta_2 = 0 \Rightarrow S(e, t) = 0$
 $S(e, t) \cdot S_x(e, t) = 0$ (1)

II случай: $\beta_2 > 0 \Rightarrow$ можно подобрать $\beta_2 \Rightarrow$ кр. усл:

$$d_2 S(e, t) = -\beta_2 S_x(e, t) \Rightarrow S_x(e, t) = -\frac{d_2}{\beta_2} S(e, t) \quad | \cdot (-S(e, t))$$

$$-S(e, t) S_x(e, t) = \frac{d_2}{\beta_2} S^2(e, t) > 0$$

$$\Rightarrow -S(e, t) S_x(e, t) > 0$$

• $S(0, t) S_x(0, t) \geq 0$ — это хотим доказать

I случай: $\beta_1 = 0 \Rightarrow S(0, t) = 0$
 $S(0, t) \cdot S_x(0, t) = 0$ (2)

II случай: $\beta_1 > 0 \Rightarrow$ можно подобрать $\beta_1 \Rightarrow$ кр. усл.

$$d_1 S(0, t) = \beta_1 S_x(0, t) \Rightarrow S_x(0, t) = \frac{d_1}{\beta_1} S(0, t) \quad | \cdot S(0, t)$$

$$S(0, t) S_x(0, t) = \frac{d_1}{\beta_1} S^2(0, t) > 0$$

$$\Rightarrow S(e, t) S_x(e, t) > 0 \quad \Rightarrow \text{все те условия} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^e S^2(x, t) dx = 0 \quad \forall t \Rightarrow S(x, t) = 0 \quad \forall x \in \overline{Q_T} \Rightarrow$$

8) Единственность решения 3К для уравнения теплопроводности.

8.1

Задача Коши:

$$(1) \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 0 \Rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \geq 0 \Rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$

У метода разделения переменных

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0$$

$$X(x) = C e^{i\lambda x}$$

$$T(t) = e^{-a^2 \lambda^2 t}$$

$$u(x, t) = C \cdot e^{i\lambda x} \cdot e^{-a^2 \lambda^2 t}$$

Т.к. это верно $\forall \lambda \Rightarrow$ берём $\int$ по λ

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda, \text{ пока } A(\lambda) \text{ выберем позже.}$$

Как получить $A(\lambda)$? Должно выполняться (2):

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$\Rightarrow A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-i\lambda s} ds \Rightarrow \text{в } u(x, t) =$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-i\lambda s} ds \right) \cdot e^{i\lambda x} \cdot e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda$$

Теперь нам хотим избавиться от λ , которое есть техническое

$\Rightarrow$ меняем порядок интегрирования:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-s) - a^2 \lambda^2 t} d\lambda \right] \varphi(s) ds \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ как-нибудь это считаем

$$[] = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) \varphi(s) ds, \quad G(x, s, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\}$$

(конф. 11.11.2017)

Определим $u(x, t)$ следующим образом:

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, t) \varphi(s) ds, & |x| < \infty, t > 0 \\ \varphi(x), & |x| < \infty, t = 0 \end{cases}$$

8.2

Уединенность

$\exists u_i(x, t) \ i=1, 2: u_i \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, $u_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ t > 0 \end{matrix}$$

$$u_i(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad |u_i(x, t)| \leq M_i, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

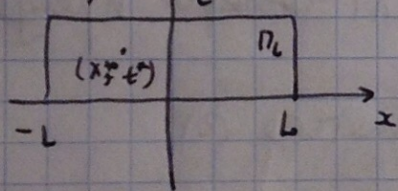
Тогда $u_1(x, t) = u_2(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

► А положить $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$

$$u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+), \quad u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (1) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & (2) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

От противного. $\exists x^*, t^* (t^* > 0): u(x^*, t^*) = U^* > 0$



Сконструируем вспомогательную ф-цию

$$\exists M = M_1 + M_2$$

$$S(x, t) = \frac{2M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right) \quad (\text{— по (1)})$$

$$S(x, 0) \geq 0$$

$$S(\pm L, t) = \frac{2M}{L^2} \left(\frac{L^2}{2} + a^2 t \right) = M + \frac{a^2 t}{L^2} \cdot 2M \geq M$$

• Lemma из приложения max $\partial_{x,t} \Pi_L = S(x, t) \mid |x| < L, 0 < t \leq T$

$$P = \overline{\Pi_L} \setminus \Pi_L$$

Если $S(x, t) \geq u(x, t)$ на $\Gamma \Rightarrow S(x, t) > u(x, t) \in \overline{\Pi_L}$

$$S(x, t) \quad S^-(x, t) = -S(x, t)$$

Сравним $S(x, t)$ и $u(x, t)$:

$$\checkmark u(x, t) \leq S(x, t) \text{ на } \Gamma \Leftarrow \begin{matrix} u(\pm L, t) \leq M \\ u(x, 0) = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} S(\pm L, t) \geq M \\ S(x, 0) \geq 0 \end{matrix}$$

$$\Downarrow \\ u(x, t) \leq S(x, t) \text{ на } \overline{\Pi_L}$$

Сравниваем $\sigma(x,t)$ и $u(x,t)$

8.3

$$\forall \sigma^-(x,0) \leq 0 \quad \sigma^-(\pm L,t) \leq -M$$

$$\sigma^-(x,t) \leq u(x,t) \text{ и } \sigma^+$$

$$\Rightarrow \sigma^-(x,t) \leq u(x,t) \leq \sigma(x,t) \text{ и } \sigma^+ \text{ (оценим сверху и снизу)}$$

$$\Rightarrow |u(x,t)| \leq \sigma(x,t) \text{ и } \sigma^+ \text{ по лемме и принципу макс}$$

$$\bullet |u(x^*, t^*)| \leq \sigma(x^*, t^*) \text{ т.е. расчитаем для макс "осевой" и}$$

$$|u(x^*, t^*)| \leq \sigma(x^*, t^*) = \frac{2M}{L^2} \left(\frac{(x^*)^2}{2} + a^2 t^* \right)$$

Все, что нам и требуется для $\forall L$ (мы можем)

для $\forall$, имеем $\delta u(x^*, t^*) \text{ задано в } D_L$

$$\Rightarrow \frac{2M}{L^2} \left(\frac{(x^*)^2}{2} + a^2 t^* \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow 0 < V^* = |u(x^*, t^*)| \leq$$

$$\leq \sigma(x^*, t^*) \rightarrow 0 \Rightarrow \forall \square$$

③ Существование решения 3к для уравнения теплопроводности

9.1

Заданы Коши:

$$(1) \quad u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$(2) \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} t > 0 \Rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \geq 0 \Rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Ищем решение в виде $U(x, t) = X(x)T(t)$

У метода разделения переменных

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0$$

$$X(x) = c \cdot e^{i\lambda x}$$

$$T(t) = e^{-a^2 \lambda^2 t}$$

$$U(x, t) = c \cdot e^{i\lambda x} \cdot e^{-a^2 \lambda^2 t}$$

Т.е. это верно $\forall \lambda \Rightarrow$ интеграл по λ

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda. \text{ Поиск } A(\lambda) - \text{соверш. по } \varphi(x).$$

Как получить $A(\lambda)$? Должно выполняться (2) ~~и (1)~~

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-i\lambda s} ds \Rightarrow \text{в } u(x, t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-i\lambda s} ds \right) e^{i\lambda x} e^{-i\lambda^2 t} d\lambda$$

Понятно, нам хочется избавиться от λ , которое было только техническим.

$\Rightarrow$ меняем порядок интегрирования:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-s) - a^2 \lambda^2 t} d\lambda \right] \varphi(s) ds \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ как-нибудь вычислим

$$[] = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Rightarrow$$

$$\textcircled{6} \Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) \varphi(s) ds, \quad G(x, s, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\}$$

(конф. нрн $t > 0$)

Определим $u(x, t)$ следующим образом:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, t) \varphi(s) ds, \quad |x| < \infty, t > 0. \quad (3)$$

9.2

Существование

Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R})$ и $|\varphi(x)| \leq M, x \in \mathbb{R}$. Тогда функции $u(x, t)$, определенная (3) такая, что:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \\ u(x, t) &\in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \\ u(x, t) &\text{ удовлетв. (1), (2).} \end{aligned}$$

$$|u(x, t)| \leq M \text{ в } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Докажем, что $\forall$ фиксир. $s: G(x, s, t)$ удовлетв. (1) и при $|x| < \infty, t > 0$ т.е. при фиксир. s G - удовлетв. канонич. уравн.

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} \cdot \left(-\frac{2(x-s)}{4a^2 t} \right) \right]$$

$$G_{xx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} \cdot \frac{4(x-s)^2}{(4a^2 t)^2} + \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} \cdot \left(-\frac{2}{4a^2 t} \right) \right]$$

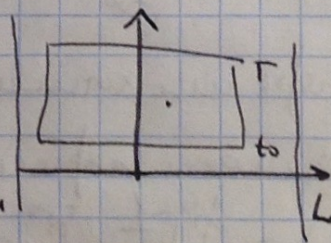
$$G_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} + \frac{1}{t^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} \cdot \frac{(x-s)^2}{4a^2 t^2} \right]$$

$$\Rightarrow \text{проверим и подстановка} \Rightarrow \dots \Rightarrow G_t = a^2 G_{xx}, G_t = a^2 G_{ss}$$

Докажем, что $u \in C^{2,1}[\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+]$

$$\Pi = \{(x, t): |x| < L, 0 < t_0 < t < T\}$$

Итак, в этом нр-ке докажем $u \in C^{2,1}[\Pi]$



$$\text{т.е. } u \in C^{2,1}(\Pi) \Rightarrow u \in C^{2,1}[\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+]$$

Докажем, что $u(x, t) \in \Pi$ и $u(x, t) \in C(\bar{\Pi})$.

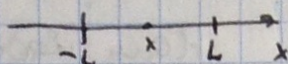
$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, t) \varphi(s) ds.$$

Нам нужно доказать при сл-ть $G(x, s, t)$ = докажем непосредственно

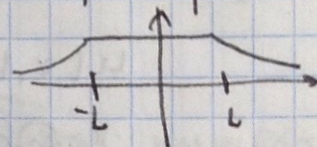
$\Rightarrow$ нужен эффективный способ $F(s)$:

$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \cdot 1 & |s| \leq L \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \cdot \exp\left\{-\frac{(L-s)^2}{4a^2 T}\right\}, & s \geq L \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \cdot \exp\left\{-\frac{(L+s)^2}{4a^2 T}\right\}, & s \leq -L \end{cases}$$

9.3



$F(s)$ -ненр.



$$\Rightarrow |G(x, s, t)| \leq F(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}, (x, t) \in \Pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x, s, t)| |\varphi(s)| ds \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds \Rightarrow \text{плм оценим}$$

$\Rightarrow$ т.к. интеграл св-ся плм, то подынтегр-ная гр-ная ненр в $\Pi \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x, t)$ упр. и ненр в верхней полупл-ти.

(т.к. можем взять $\forall \Pi \Rightarrow$ во всех в. пол-ти)

• $u \in C^{2,1}[\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+]$. Док-м для $u \in C^{2,1}[\Pi]$

$$G_+ = a^2 G_{xx}$$

$$G_+(x, s, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} + \frac{1}{t^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \cdot \frac{(x-s)}{4a^2 t} \right]$$

$\Rightarrow$ непосредственно преобразуем:

$$G_+(x, s, t) = G(x, s, t) \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{(x-s)^2}{4a^2 t^2} \right]$$

$$|G_+(x, s, t)| \leq F(s) \cdot \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t_0} + \frac{(L+|s|)^2}{4a^2 t_0^2} \right| \stackrel{\forall s \in \mathbb{R}}{=} F_1(s)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(s) dx = \infty \Rightarrow \text{аналогично } u(x, t) \Rightarrow u_+$$

$$u_+(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_+(x, s, t) \varphi(s) ds;$$

$$\int |G_+ \varphi(s)| ds \leq M \cdot \int F_1(s) ds \Rightarrow \text{соотв. пром } u_+(x, t) \exists.$$

Дно u_{xx} аналогично

• $u_t = a^2 u_{xx}$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

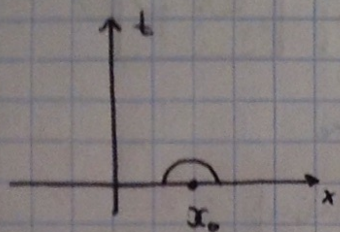
$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \sim \int_{-\infty}^{+\infty} [G_t - a^2 G_{xx}] \varphi(s) ds = 0$$

а это и есть док-м, т.к. G -реш. упр. тенн.

Остаток док-ты, что $u \in C[\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+]$

9.4

Нам надо док-ть непрерывности функции u в точке $(x_0, 0)$



Берем $(x_0, 0)$ и смотрим её окр-ть

$$u(x, t) \rightarrow \varphi(x_0)$$

$$\text{т.е. } x \rightarrow x_0, t \rightarrow 0+ \Rightarrow \forall \epsilon \text{ (т.к. } x_0 \text{ — непрерывно)}$$

(1) Форм-ка непрерывности

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon): (x - x_0)^2 + t^2 < \delta(\epsilon)^2, \text{ то } |u(x, t) - \varphi(x_0)| < \epsilon$$

Если мы исходим из непрерывности φ в x_0

Непр-ть $\varphi(x)$ в x_0

$$\forall \epsilon \exists \Delta(\epsilon): |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\epsilon}{4} \text{ при } |x - x_0| < 2\Delta(\epsilon)$$

На рисунке: $x_0 - 2\Delta(\epsilon), x_0 - \Delta(\epsilon), x_0, x_0 + \Delta(\epsilon), x_0 + 2\Delta(\epsilon)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) ds = 1 \quad \text{Получаем: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4t}\right\} ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-\frac{z^2}{4t}\right\} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) \varphi(s) ds - \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) \varphi(x_0) ds \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) [\varphi(s) - \varphi(x_0)] ds \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) |\varphi(s) - \varphi(x_0)| ds =$$

$$= \int_{x_0 - 2\Delta(\epsilon)}^{x_0 + 2\Delta(\epsilon)} G(x, s, t) |\varphi(s) - \varphi(x_0)| ds + \int_{x_0 + 2\Delta(\epsilon)}^{+\infty} G(x, s, t) |\varphi(s) - \varphi(x_0)| ds + \int_{-\infty}^{x_0 - 2\Delta(\epsilon)} G(x, s, t) |\varphi(s) - \varphi(x_0)| ds$$

(I₁, I₂, I₃)

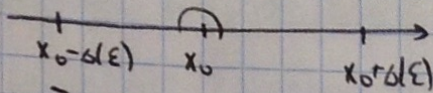
Оценим интегралы:

$$I_2 \leq \frac{\epsilon}{4} \int_{x_0 - 2\Delta(\epsilon)}^{x_0 + 2\Delta(\epsilon)} G ds \leq \frac{\epsilon}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) ds = \frac{\epsilon}{4}$$

(по непрерывности φ в x_0)

$$I_1 \leq 2M \int_{-\infty}^{x_0 - 2\Delta(\epsilon)} G(x, s, t) ds \quad \text{т.к. } |\varphi(s)| \leq M$$

$\Delta(\epsilon)$ функция, т.е. надо подобрать $\Delta(\epsilon)$ так, чтобы $\delta(\epsilon) < \Delta(\epsilon)$

$\Rightarrow$ 

$$\Leftrightarrow 2M \int_{-\infty}^{x_0 + 2\delta(\epsilon)} G(x, s, t) ds = |z = \frac{s-x}{\sqrt{4\epsilon^2 t}}| = \left(2M \int_{-\infty}^{\frac{x_0 - 2\delta(\epsilon) - x}{\sqrt{4\epsilon^2 t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \right) =$$

$$1 * \epsilon^2 + (x - x_0)^2 \leq \delta(\epsilon)^2 \neq 1$$

= т.т.к. нам нужен оценочный сверху $\Rightarrow$ берем максимум

своего $\delta(\epsilon)$ $\Rightarrow$ заменим $x \rightarrow x_0 - \delta(\epsilon) \neq 1$

$$\leq 2M \int_{-\infty}^{\frac{x_0 - 2\delta(\epsilon) - (x_0 - \delta(\epsilon))}{\sqrt{4\epsilon^2 t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = 2M \int_{-\infty}^{-\frac{\delta(\epsilon)}{\sqrt{4\epsilon^2 t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \quad \textcircled{<}$$

$\delta(\epsilon)$ фиксировано, а $\delta(\epsilon)$ не стремится $\Rightarrow t \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{\delta(\epsilon)}{\sqrt{4\epsilon^2 t}} \rightarrow -\infty \Rightarrow$$

$$\textcircled{<} \frac{\epsilon}{4} \quad \int \delta_1(\epsilon) < \delta(\epsilon)$$

$$\cdot I_3 = 2M \int_{x_0 + 2\delta(\epsilon)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\epsilon^2 t}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(s-x)^2}{4\epsilon^2 t} \right\} ds = |z = \frac{(s-x)}{\sqrt{4\epsilon^2 t}}| =$$

$$= 2M \int_{\frac{x_0 + 2\delta(\epsilon) - x}{\sqrt{4\epsilon^2 t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \quad \textcircled{<} \text{пока условие от } x \Rightarrow \text{не меняю}$$

и предел берем меньше $\Rightarrow x$ заменим
на $x_0 - \delta(\epsilon)$

$$\textcircled{<} 2M \int_{\frac{x_0 + 2\delta(\epsilon) - (x_0 - \delta(\epsilon))}{\sqrt{4\epsilon^2 t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = 2M \int_{\frac{\delta(\epsilon)}{\sqrt{4\epsilon^2 t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \quad \textcircled{<} 1 * \text{суммируем}$$

$\delta_1(\epsilon) + 1$

$$\textcircled{<} \frac{\epsilon}{4}$$

$$\Rightarrow |u(x, t) - \varphi(x_0)| \leq I_1 + I_2 + I_3 \leq \frac{3\epsilon}{4}, \text{ т.е. мы докажем, что}$$

$$u(x, t) \rightarrow \varphi(x_0) \text{ при } x \rightarrow x_0, t \rightarrow 0+$$

$$\cdot \text{Докажем, что } |u(x, t)| \leq M \text{ в } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

$$\cdot t = 0 \text{ очевидно из } \varphi \text{ гл. } \forall (u(x, t) = \varphi(x), \varphi(x) \leq M)$$

$$\cdot t > 0: |u(x, t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) |\varphi(s)| ds \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) ds = M \cdot 1$$

10) Метод продолжения решения I и II
краевой задачи для ур-на теплопроводности

10.1

I кр. з. на полуинтервале.

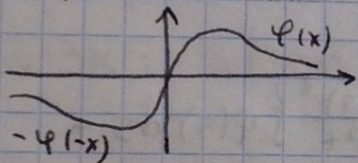
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 & (1) \\ u(0, t) = 0, & t > 0 & (2) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & & (3) \end{cases}$$

Если мы хотим, чтобы реш. было неопределено $\Rightarrow$ надо потребовать совпадения $\varphi(0) = 0$

Вспомогат. зк для $V(x, t)$:

$$\begin{cases} V_t = a^2 V_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ V(x, 0) = P(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

$P(x)$ - нечетное продолжение $\varphi(x)$: $P(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x), & x \leq 0 \end{cases}$



$$u(x, t) = V(x, t) \quad x > 0, t > 0$$

Нам надо убедиться, что это удовн (1) - (3):

(1) $\oplus$ - несомн у вып $V(x, t)$

(3) $\oplus$ - $V(x, 0) = \varphi(x), x > 0$

(2)? $u(0, t) = V(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{s^2}{4a^2 t}\right\} P(s) ds = 0$
(интеграл по симм. отрезку от нечет ф-ции $= 0$)

$$u(x, t) = V(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} P(s) ds$$

Кл. попом. и отнес. полуинтервал $P(s)$ отнес ко-ординат.

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds$$

$z = -s = \xi \quad / -ds = d\xi /$

$$\Rightarrow \varphi(x, t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(\xi) d\xi \Rightarrow$$

$$\varphi(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \right] \varphi(s) ds \quad 10.2$$

II краевая задача на полупространстве

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ U(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{Вспомогательная задача} \\ & \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x > 0, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 & (2) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (3) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\varphi(x)$ — четное продолжение $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

$$I \quad u(x,t) = U(x,t) \quad x \geq 0, \quad t \geq 0$$

Нам надо убедиться, что это решение (1)-(3)

(1), (3) выполняются автоматически

$$\begin{aligned} (2): \quad u_x(0,t) &= U_x(0,t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \cdot \left(-\frac{2(x-s)}{4a^2 t}\right) \right] \varphi(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \exp\left\{-\frac{s^2}{4a^2 t}\right\} \cdot \frac{s}{2a^2 t} \varphi(s) ds = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds + \\ &+ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(-s) ds = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \right] \varphi(s) ds$$

11) Интервальное представление решения I кр. задачи для ур-ия теплопроводности на полуоси

11.1

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

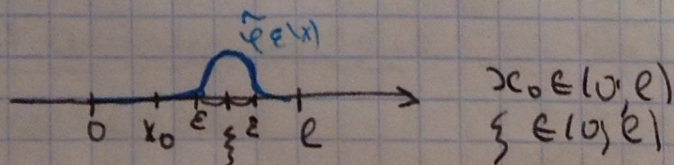
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Интервал вынесем вперед и всё, что не относится к $\varphi(s)$ поместим в G :

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, s, t) \varphi(s) ds, \quad \text{где } G(x, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} s e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}$$

• Но ЗК: $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right] \varphi(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, t) \varphi(s) ds$

1 кр. задача	Задача на всей оси так как
1) $G(x, s, t) = G(s, x, t)$	$G(x, s, t) = G(s, x, t)$
2) $G_t = a^2 G_{xx}$	$G_t = a^2 G_{xx}$
3) $G \in C^\infty \quad t > 0$	$G \in C^\infty \quad t > 0$
4) $G(x, s, t) \geq 0 \quad x, s \in [0, l], t > 0$ Док-им это:	$G(x, s, t) > 0 \quad x, s \in \mathbb{R}, t > 0$ (это очевидно)



$$u(x_0, t) = \int_0^l G(x_0, s, t) \varphi(s) ds$$

Рассм. мест-во $u_\varepsilon(x, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \\ u_\varepsilon(0, t) = u_\varepsilon(l, t) = 0 \\ u_\varepsilon(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x) \end{cases}$$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_\varepsilon(x), & x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \\ 0, & x \in [0, \ell] \setminus (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \end{cases}$$

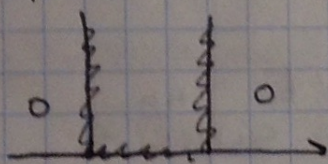
11.2

$$\varphi_\varepsilon(x) \in C[0, \ell]$$

$$\int_0^\ell \varphi_\varepsilon(s) ds = 1$$

то, у нас эти $\varphi_\varepsilon(x)$ стремятся к
этой самой $\delta(x - \xi)$, это семейство
строго больше 0 и $x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$,
и $\int \varphi_\varepsilon = 1$

• $u_\varepsilon(x, t) \geq 0$ по принципу максимума:



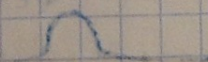
$\Rightarrow$ мин ≥ 0 на $\partial \Omega \Rightarrow$ всюду

$$u_\varepsilon(x_0, t) = \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} G(x_0, s, t) \tilde{\varphi}_\varepsilon(s) ds = \text{по } \nabla \varphi \text{ с помощью } =$$

$$= G(x_0, \xi^*, t) \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \tilde{\varphi}_\varepsilon(s) ds \Rightarrow G(x, \xi^*, t) = u_\varepsilon(x_0, t)$$

или её так $= 1$
выбраны

$$\Rightarrow G(x_0, \xi, t) \geq 0$$



12) Уравнения Лапласа и Пуассона.

Постановка основных задач. Фундамент.
решения уравнения Лапласа.

4 уравнения теплопроводности

$$u_t(x, y, z, t) = a^2 \Delta u + \tilde{f}_1(x, y, z, t) \quad (x, y, z, t) \in \Omega$$

$$\begin{cases} u_t(x, y, z, t) = a^2 \Delta u + \tilde{f}_2(x, y, z, t) & (x, y, z, t) \in \Omega \\ u(x, y, z, t) = \tilde{g}(x, y, z, t) & (x, y, z, t) \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Стационарный тепловой процесс ($u_t = 0$) $\Rightarrow u(x, y, z) = \tilde{f}(x, y, z)$
 $\Rightarrow \Delta u = -f(x, y, z) \quad (f = \frac{\tilde{f}}{a^2})$

$$\Delta u = -f(x, y, z) \quad \text{— уравнение Пуассона} \quad \Delta u = -f(x, y)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{— уравнение Лапласа} \quad \Delta u = 0$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Физический смысл: стационарные ур-е тепла, стат. поле $u(x, y, z)$

Опр Гармоническая функ (в $\mathbb{R}^n$) $u(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, если:

$$1) \Omega \subset \mathbb{R}^n, u(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$$

$$1) u \in C^2(\Omega)$$

$$2) \Delta u = 0 \text{ в } \Omega$$

Связь между аналитическими и гармоническими функ

$$z = x + iy$$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$f(z)$ аналитическая.

Условия Коши:

$$\text{Условия К-Р: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta u = 0$$

аналитическая $\Rightarrow$ $\Delta v = 0$

Фундаментальные реш. ур-ия Лапласа

12.2

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3 (E^3)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } E^2$$

• Фундам. реш. в E^3

$$u(x, y, z) = \frac{1}{R_{MM_0}}$$

$$u(x, y, z) \\ u_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad \text{опр.-ия } \forall M \neq M_0$$

$$\Delta u = 0 \quad \forall M \neq M_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{2} \frac{2(x-x_0)}{R_{MM_0}^3} = - \frac{(x-x_0)}{R_{MM_0}^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{1}{R_{MM_0}^3} + \frac{3}{2} \frac{2(x-x_0)^2}{R_{MM_0}^5} = - \frac{1}{R_{MM_0}^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{R_{MM_0}^5}$$

$$\Rightarrow \Delta u = - \frac{3}{R_{MM_0}^5} + \frac{3[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]}{R_{MM_0}^5} = - \frac{3}{R_{MM_0}^5} + \frac{3R_{MM_0}^2}{R_{MM_0}^5} = 0$$

т.е. подставив в $\Delta u = 0$ ($\text{в } E^3$) $u = \frac{1}{R_{MM_0}}$ т.е.

Физический смысл: есть маленький зарядик, он создаёт поле, $\frac{1}{R_{MM_0}}$ - потенциал, создаваемый зарядом

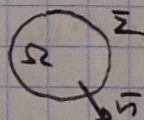
• Фундам. реш. в E^2 :

$$u(x, y) = \ln \frac{1}{r_{MM_0}}, \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$\Delta u = \Delta \ln \frac{1}{r_{MM_0}} = 0 \quad \forall M \neq M_0$$

Задачи Дирихле и Неймана

$$\Omega \subset E^3, \quad \Sigma - \text{граница } \Omega$$



Внутр. задача Дирихле: Найти $u(x, y, z)$: $\Delta u = 0$ в Ω , $u(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$ $(x, y, z) \in \Sigma$

Внутр. задача Неймана: Найти $u(x, y, z)$: $\Delta u = 0$ в Ω , $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z)$ $(x, y, z) \in \Sigma$ т.е. задан ее норм. производная

Внеш. задача Дирихле: Найти $u(x, y)$: $\Delta u = 0$ в Ω , $u(x, y) = \varphi(x, y)$ $(x, y) \in L$

Внеш. задача Неймана: Найти $u(x, y)$: $\Delta u = 0$ в Ω , $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \psi(x, y)$ $(x, y) \in L$

Внеш. з. Дирихле: Найти $u(x, y, z)$: $\Delta u = 0$, $(x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}$

Внеш. з. Неймана: $u(x, y, z)$: $\Delta u = 0$ $(x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}$, $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Sigma$

13) 1 и 2 формулы Грина. 3 (основная) формула Грина.

13.1

Ω , отр. $\bar{\Omega}$, $\bar{\Sigma}$ сост. из конечного числа гладких кусков (кусков с невр. мен-ся касательной)

• Ф-ла Остроградского Гаусса:

$$\vec{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

$$\iint_{\Sigma} (\vec{A} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} d\tau$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\operatorname{grad} \sigma = \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right\}$$

E^3 Ω отр. $\bar{\Sigma}$. 4 ф-лы $u, \sigma \in C^2(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$,

$$\vec{A}(x, y, z) = u \operatorname{grad} \sigma$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = u \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + u \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

$u \Delta \sigma \quad (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \sigma)$

$$\operatorname{div} \vec{A} = u \Delta \sigma + (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \sigma)$$

$$\iint_{\Sigma} (\vec{A} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Sigma} (u \operatorname{grad} \sigma, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial \sigma}{\partial n} d\sigma$$

||

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} d\tau = \iiint_{\Omega} u \Delta \sigma d\tau + \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \sigma) d\tau$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} u \frac{\partial \sigma}{\partial n} d\sigma = \iiint_{\Omega} u \Delta \sigma d\tau + \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \sigma) d\tau$$

$$(*) \quad \iiint_{\Omega} u \Delta \sigma d\tau = - \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \sigma) d\tau + \iint_{\Sigma} u \frac{\partial \sigma}{\partial n} d\sigma$$

I ф-ла Грина

• $\vec{A}(x, y, z) = \sigma \operatorname{grad} u$ (т.е. n -ое направление измерения)

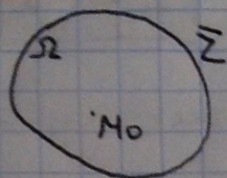
$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \sigma \Delta u d\tau = - \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad} \sigma, \operatorname{grad} u) d\tau + \iint_{\Sigma} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \quad (**)$$

$$\Rightarrow (*) - (**) \Rightarrow \iiint_{\Omega} (\sigma \Delta u - \Delta \sigma u) d\tau = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$$

II ф-ла Грина

III (основная) формула Римана

13.2



$$M(x, y, z) \\ M_0(x_0, y_0, z_0)$$

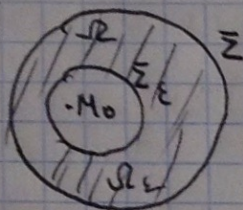
$$u \in C^2(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$$

$$S = \frac{1}{R_{MM_0}}$$

$\Rightarrow$ 2-я ф-ла Римана

Но из-за особенностей внутри не можем записать, но нам это очень хочется..

$\Rightarrow$



$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \epsilon\text{-окр. } (.) Mo$$

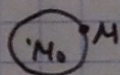
$\Rightarrow$ запишем 2-ю ф-лу Римана в Ω_ϵ

$$\iiint_{\Omega_\epsilon} \left[u \Delta \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u \right] d\tau = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + \\ + \iint_{\Sigma_\epsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma \quad (*)$$

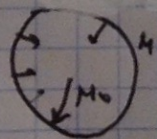
вот тут должен быть '-', но мы его оставили
вот тут $\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n}$ в знамен. ϵ ,
в числ. $4\pi\epsilon^2 =$
 $= \frac{4\pi\epsilon^2}{\epsilon} = 4\pi\epsilon \rightarrow 0$

(*) : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$

неф. ф-ла
из кав-ти $\Rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \leq M$ на Σ_ϵ



(**): $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}}$



$$(x-x_0), (y-y_0), (z-z_0)$$

координаты

чтобы получить единичный вектор нормали деление на R_{MM_0}

$$\vec{n} = \left\{ \frac{x-x_0}{R_{MM_0}}, \frac{y-y_0}{R_{MM_0}}, \frac{z-z_0}{R_{MM_0}} \right\}$$

А теперь делаем внешний:

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{x-x_0}{R_{MM_0}}, -\frac{y-y_0}{R_{MM_0}}, -\frac{z-z_0}{R_{MM_0}} \right\} \text{ - экв. нормали к сфере}$$

$$\text{grad } \frac{1}{R_{MM_0}} = \left\{ -\frac{x-x_0}{R_{MM_0}^3}, -\frac{y-y_0}{R_{MM_0}^3}, -\frac{z-z_0}{R_{MM_0}^3} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} = (\vec{n}, \text{grad } \frac{1}{R_{MM_0}}) = \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{R_{MM_0}^4} = \frac{1}{R_{MM_0}^3} = \frac{1}{\epsilon^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} u(M) d\sigma =$$

133

$$= |\nabla_0 \text{сферическая}| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} u(M^*) 4\pi \varepsilon^2 = |M^* \rightarrow M_0| = 4\pi u(M_0)$$

$\Rightarrow \rho(\star)$ и предельный при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \left[u \Delta \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u \right] d\tau = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + 4\pi u(M_0)$$

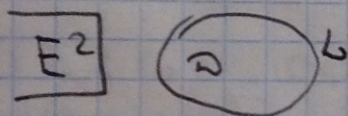
$$\Rightarrow -\iiint_{\Omega} \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u d\tau = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + 4\pi u(M_0)$$

$$\Rightarrow 4\pi u(M_0) = -\iiint_{\Omega} \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u d\tau - \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$$

III основная формула Пуанкаре

I u-гармоническая в $\Omega \Rightarrow$

$$4\pi u(M_0) = -\iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$$



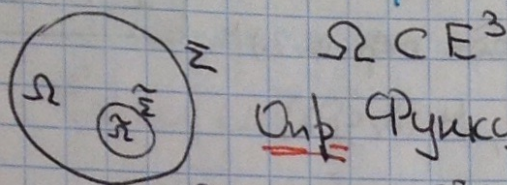
II формула Пуанкаре: $f(x, y), g(x, y)$

$$\iint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dS = \iint_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl$$

III формула Пуанкаре

$$2\pi u(M_0) = -\iint_{\Omega} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \Delta u dS - \int_{\partial \Omega} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dl$$

14) Свойства гармонических функций 14.1



1) Пусть функция $u(x, y, z)$ гармоническая в Ω ,
если $u \in C^2(\Omega)$

2) $\Delta u = 0$ в Ω

Св-во 1 Если u гармоническая в Ω , то $\iint_{\tilde{\Sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$,
где $\tilde{\Sigma}$ - произв. замкнутое мн-во $\subset \Omega$

► III гр-на Грина: $\iiint_{\tilde{\Sigma}} (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{\tilde{\Sigma}} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$

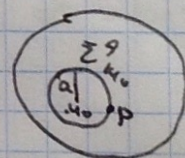
$u \equiv u, v \equiv 1 \Rightarrow$ применим к этой гр-е

$$\iiint_{\tilde{\Sigma}} (0 - 0) d\tau = \iint_{\tilde{\Sigma}} (0 - \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_{\tilde{\Sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$$

Св-во 2 Если u гармонич. в Ω , то $\forall M_0 \in \Omega$ и
(гр-на сред. зн-ия) $\forall \Sigma_{M_0}^a \subset \Omega$ (т.е. M_0 в рад. Q)

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(P) d\sigma_P$$



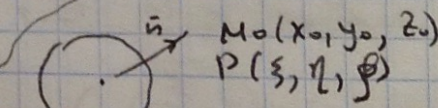
► Для гармонич. $\Rightarrow$ III гр-на Грина для u :

$$4\pi u(M_0) = - \iint_{\Sigma_{M_0}^a} [u(P) \frac{\partial}{\partial n} (\frac{1}{R_{M_0 P}}) - \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n}] d\sigma_P$$

$$\cdot \iint_{\Sigma_{M_0}^a} \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_P = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma_{M_0}^a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$$

$\Rightarrow$ по св-ву 1.

$$\Rightarrow 4\pi u(M_0) = - \iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(P) \frac{\partial}{\partial n} (\frac{1}{R_{M_0 P}}) d\sigma_P$$



$$\vec{n} = \left\{ \frac{\xi - x_0}{R_{M_0 P}}, \frac{\eta - y_0}{R_{M_0 P}}, \frac{z - z_0}{R_{M_0 P}} \right\}$$

$$R = \sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) = - \frac{\xi - x_0}{R_{M_0 P}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) = - \frac{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{R_{M_0 P}^3}$$

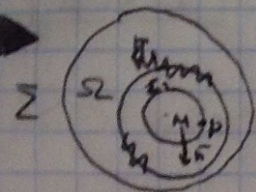
$$\Rightarrow u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(P) d\sigma_P$$

$$= - \frac{1}{R_{M_0 P}^2} = - \frac{1}{a^2}$$

Св 03 Если u гармонич. в Ω , то $u \in C^{\infty}(\Omega)$

14.2

т.е. $\bar{\Sigma}_1$ содержит в себе окр-ть $(.)M$



$\exists p \in \bar{\Sigma}_1, p(\xi, \eta, \zeta), M(x, y, z)$

Π г-на Римана для гармон. г-ны:

$$u(x, y, z) \equiv u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{Mp}} \right) - \frac{1}{R_{Mp}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma_p =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \left[u(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \frac{\partial u}{\partial n_p} \right] d\sigma_p$$

1. Рассмотрим из это, как из доверия мет. анализа. Видим, что

x, y, z берут в окр-ти $(.)M_0$, а p из окр-ти $\bar{\Sigma}_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(M, p) \geq \rho > 0$, т.е. $(.)M$ отд. от $(.)P \Rightarrow$ нет никаких

исходностей, т.е. нет-нет зп. от края, т.к. нет осб,

причем г-ны под ними $\delta_k \partial u / \partial x_k \neq 0$

$\Rightarrow$ г-на $\delta_k \partial u / \partial x_k$ по x, y, z . ■

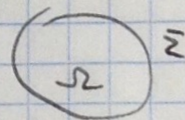
15) Принцип максимума для гармонических функций

15.1

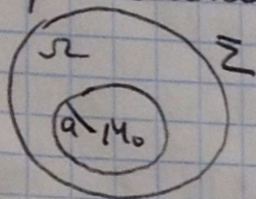
Если u гармон. в Ω и $u \in C(\bar{\Omega}) \Rightarrow$

$$\max_{M \in \bar{\Omega}} u(M) = \max_{M \in \Sigma} u(M)$$

$$\min_{M \in \bar{\Omega}} u(M) = \min_{M \in \Sigma} u(M)$$



Предположим, что $\nexists M_0 \in \Omega$:



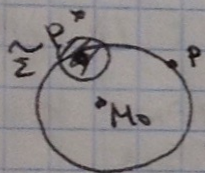
$$u(M_0) = \max_{M \in \bar{\Omega}} u(M) = U$$

Возьмем окр-ть $(.) M_0$: $\Sigma^a_{M_0} \subset \Omega$

Т.к. мы находимся в обл-ти регулярности $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ∇ о средних значениях

$$U = u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma^a_{M_0}} u(P) d\sigma_P = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma^a_{M_0}} U d\sigma_P = U \quad (*)$$



$\Rightarrow u(P) = U \quad \forall P \in \Sigma^a_{M_0}$ т.е. $\forall$ сфере

достиг макс значения. Док-м это от противного:

$\nexists P^* \in \Sigma^a_{M_0} : u(P^*) < U - \varepsilon$

u -непр $\Rightarrow$ на этом эл-те пов-ти $u(P) < U - \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall P \in \Sigma \Rightarrow P^*$ непрерывно становится сферой, т.е. $U < U \Rightarrow$

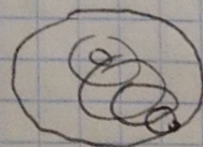
$\Rightarrow W$

т.е. мы получили, что если в к-л $(.)$ внутри достиг. макс $\Rightarrow$ на $\Sigma^a_{M_0}$ достиг этот макс.

Выбираем на сфере $\forall (.)$ зс коб-ую и т.д. $\Rightarrow \exists$ послед-ца

$M_n \subset \Omega, n \rightarrow \infty : M_n \rightarrow P^* \in \Sigma$

$$u(M_n) = U$$



$$u(P^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(M_n) = U \quad (P \text{ непрерывно})$$

$$\Rightarrow \max_{M \in \bar{\Omega}} u(M) = \max_{M \in \Sigma} u(M)$$

Если макс или мин достиг внутри, то ф-ция const.

16) Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле для ур-ия Лапласа.

16.1

Т) Единственность

Др-ии $u_i(x, y, z)$ $i = 1, 2$:

$$1) u_i \in C(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega)$$

$$2) \Delta u_i = 0 \text{ в } \Omega$$

$$3) u_i(x, y, z) = \mu(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \bar{Z}$$

Тогда $u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z)$ в $\bar{\Omega}$

► $\Delta \delta(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$.

$$1) \delta \in C(\bar{\Omega}), \delta \in C^2(\Omega)$$

$$2) \Delta \delta = 0 \text{ в } \Omega$$

$$3) \delta(x, y, z) = 0 \text{ на } \Sigma$$

Из 1), 2) $\Rightarrow \delta(x, y, z)$ - гармоническая $\Rightarrow$ справедлив принцип макс

$$\Rightarrow \max_{M \in \bar{\Omega}} \delta(M) = \max_{M \in \Sigma} \delta(M) = 0$$

$$\min_{M \in \bar{\Omega}} \delta(M) = \min_{M \in \Sigma} \delta(M) = 0$$

$$\Rightarrow \delta(x, y, z) = 0 \text{ в } \bar{\Omega} \Rightarrow u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z)$$

Устойчивость

Лемма Др-ии $u_i(x, y, z)$ $i = 1, 2$:

$$1) u_i \in C(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega)$$

$$2) \Delta u_i = 0 \text{ в } \Omega \quad (\text{н.е. гармоническая})$$

$$3) u_1(x, y, z) > u_2(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \bar{Z}$$

$$\Rightarrow u_1(x, y, z) > u_2(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega}.$$

► $\Delta \delta(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) (> 0 \text{ на } \bar{Z})$

$$\delta \in C(\bar{\Omega}), \delta \in C^2(\Omega), \Delta \delta > 0 \text{ в } \Omega$$

$$\Rightarrow \min_{M \in \bar{\Omega}} \delta(M) = \min_{M \in \Sigma} \delta(M) \geq 0$$

$$\Rightarrow \delta(M) \geq 0 \text{ в } \bar{\Omega} \Rightarrow u_1(x, y, z) > u_2(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega}$$

Т об устойчивости

16.2

] $u_i(x, y, z) \quad i=1, 2:$

$$1) u_i \in C(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega)$$

$$2) \Delta u_i = 0 \text{ в } \Omega \text{ и}$$

$$3) u_i(x, y, z) = \mu_i(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \bar{\Sigma}$$

$$\Rightarrow \max_{(x, y, z) \in \bar{\Omega}} |u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)| = \max_{(x, y, z) \in \bar{\Sigma}} |\mu_1(x, y, z) - \mu_2(x, y, z)|$$

► Обозначим $\bar{M} = \max_{(x, y, z) \in \bar{\Sigma}} |\mu_1(x, y, z) - \mu_2(x, y, z)| = \text{const}$

• $V^+(x, y, z) = \bar{M}, \quad V^-(x, y, z) = -\bar{M}$

ф. $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$

• Функции $u(x, y, z), V^\pm(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$

$$u(x, y, z), V^\pm(x, y, z) \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u = 0; \quad \Delta V^\pm = 0$$

• А $u(x, y, z) \leq V^+(x, y, z)$

$$u(x, y, z) \leq V^+(x, y, z) \text{ на } \bar{\Sigma} \Rightarrow \text{по лемме} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, y, z) \leq V^+ \text{ в } \bar{\Omega}$$

• А $u(x, y, z) \geq V^-(x, y, z)$

$$u(x, y, z) \geq V^-(x, y, z) \text{ на } \bar{\Sigma} \Rightarrow \text{по лемме} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, y, z) \geq V^- \text{ в } \bar{\Omega}$$

$$\Rightarrow V^-(x, y, z) \leq u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) \leq V^+(x, y, z) \text{ в } \bar{\Omega}$$

$$|u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)| \leq \max_{(x, y, z) \in \bar{\Sigma}} |\mu_1(x, y, z) - \mu_2(x, y, z)|$$

17.1

17) Единственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения и необходимые условия его разрешимости $(\Omega)^\Sigma$

Опр. Функция $u(x, y, z)$ называется решением внутр. задачи Неймана, если:

$$\begin{aligned} u &\in C^1(\bar{\Omega}) \\ u &\in C^2(\Omega) \\ \Delta u &= 0 \text{ при } (x, y, z) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) &= \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma \end{aligned}$$

Теорема единственности

Пусть $u_i(x, y, z), i = 1, 2$: 1) $u_i \in C^1(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega)$

2) $\Delta u_i = 0$ при $(x, y, z) \in \Omega$

3) $\frac{\partial u_i}{\partial n}(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$ при $(x, y, z) \in \Sigma$

Тогда $u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) = \text{const}$.

Пусть $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$

$\Rightarrow u \in C^1(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega), \Delta u = 0$ в $(x, y, z) \in \Omega$,

$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \Sigma$

т.е. const. Тогда есть, дока-м, что const = 0

Используем Грина для каких-то u, δ :

$$\iiint_{\Omega} u \Delta \delta \, d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial \delta}{\partial n} \, d\sigma - \iiint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } \delta) \, d\tau$$

Возьмем $u = \delta = u(x, y, z) = u_1 - u_2$.

$$\iiint_{\Omega} u \Delta u \, d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma - \iiint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } u) \, d\tau$$

$\Delta u = 0$ $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$

$$\iiint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } u) \, d\tau = 0$$

$$\iiint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) d\tau = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = \text{const}$$

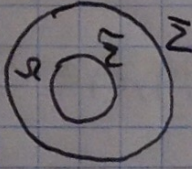
Замечание Так же можно было
заключить, что...

17.2

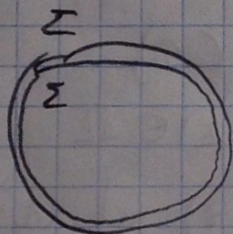
Необход. усл-ие разрешимости внутр. згд акси Неймана

Если $u(x, y, z)$ - р-н. внутр. згд Неймана $(\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \bar{u}(x, y, z) \text{ на } \bar{\Omega})$,

то $\iint_{\Sigma} \bar{u}(x, y, z) d\sigma = 0$

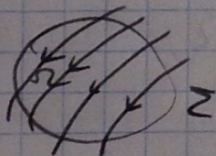
►  u - решение в $\Omega \Rightarrow \iint_{\tilde{\Sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$

Возьмём $\tilde{\Sigma}$, устремим к Σ :



$$\iint_{\tilde{\Sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \rightarrow \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint_{\Sigma} \bar{u} d\sigma \rightarrow 0$$

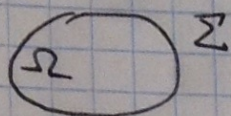
Физическая интерпретация



$\iint_{\Sigma} \bar{u} d\sigma = 0 \Rightarrow$ сколько вытекло, столько и
втекло.

гидродинамическая модель

18) Единственность решения внешней задачи Дирихле для ур-но Лапласа в 2-х и 3-х мерном случае.



Опр. Функция $u(x, y, z)$ - решение внешней задачи Дирихле, если 1) $u \in C(E^3 \setminus \Omega)$

$$u \in C^2(E^3 \setminus \bar{\Omega})$$

$$2) \Delta u = 0 \text{ при } (x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}$$

$$3) u(x, y, z) = \mu(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

$$|u(x, y, z)| \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

Теорема единственности

$$\exists u_i(x, y, z); i = 1, 2: 1) u_i \in C(E^3 \setminus \Omega)$$

$$u_i \in C^2(E^3 \setminus \bar{\Omega})$$

$$2) \Delta u_i = 0 \text{ при } (x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}, i$$

$$3) u_i(x, y, z) = \mu(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

$$|u_i(x, y, z)| \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \delta(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) \Rightarrow \delta \equiv 0$$

$$\delta \in C(E^3 \setminus \Omega), \delta \in C^2(E^3 \setminus \bar{\Omega}), \Delta \delta = 0, \delta|_{\Sigma} = 0 \text{ при } (x, y, z) \in \Sigma$$

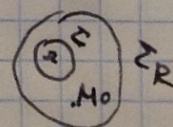
$$|\delta(x, y, z)| \rightarrow 0, x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

Докажем, что $\delta \equiv 0$.

От противного. $\exists M_0(x_0, y_0, z_0) \in E^3 \setminus \bar{\Omega} : \delta(x_0, y_0, z_0) = A > 0$

$\Rightarrow$ по определению сфер: $\exists$ сфера Σ_R (радиус R) $\in$, содержащая

$$\Omega \text{ и } (1) M_0 : |\delta(x, y, z)| \leq \frac{A}{2}, (x, y, z) \in \Sigma_R.$$



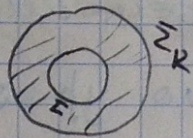
$$\Rightarrow \max_{\Sigma_R} \delta(x, y, z) \leq \frac{A}{2}$$

$$\min_{\Sigma_R} \delta(x, y, z) \geq -\frac{A}{2}$$

Применение к δ принципу макс-мин

18.2

в открытом обл-ти Ω_R



Система Σ_R ,
включая $\bar{\Sigma}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max_{\Sigma_R} \delta = \max_{\Sigma \cup \bar{\Sigma}_R} \delta \leq \frac{A}{2} \\ \min_{\Sigma_R} \delta = \min_{\Sigma \cup \bar{\Sigma}_R} \delta > -\frac{A}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\delta(x_0, y_0, z_0)| \leq \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon \text{ тем, что } \delta(x_0, y_0, z_0) = A \Rightarrow \delta(x, y, z) = 0$$

Пример] $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 < a^2$
 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

А такую пост. 3-дифферен

1) $u \in C(E^3 | \Omega)$

2) $\Delta u = 0$ в $E^3 | \Omega$

3) $u(x, y, z) = C = \text{const}$ $(x, y, z) \in \Sigma$

$$u_1(x, y, z) = C$$

$$u_2(x, y, z) = \frac{C a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- реш. данного задания,

но $u_1 \neq u_2 \Rightarrow$ в такой пост-ке
 не существует

Выводы о сходимости

(2) Ω - открытый шк. В

Оп Функция $u(x, y, z)$ - решение внешней задачи

Дифферен, если 1) $u \in C(E^3 | \Omega)$
 2) $u \in C^2(E^3 | \bar{\Omega})$

2) $\Delta u = 0$ н/м $(x, y) \in E^2 | \bar{\Omega}$

3) $u(x, y) = \mu(x, y)$ н/м $(x, y) \in \bar{\Omega}$

$|u(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in E^2 | \bar{\Omega}$

У Единственность

] $u_i(x, y) \quad i=1, 2$: 1) $u_i \in C(E^2 | \bar{\Omega})$

$u_i \in C^2(E^2 | \bar{\Omega})$

2) $\Delta u_i = 0 \quad (x, y) \in E^2 | \bar{\Omega}$

3) $u_i(x, y) = \mu(x, y) \quad (x, y) \in \bar{\Omega}$

$|u_i(x, y)| \leq M_i, \quad (x, y) \in E^2 | \bar{\Omega}$

Тогда $u_1(x, y) = u_2(x, y)$

► $\exists \delta = u_1 - u_2 : \int \delta(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$

$\Rightarrow \delta(x, y) \in C(E^2 \setminus \bar{D}), \delta(x, y) \in C^2(E^2 \setminus \bar{D})$

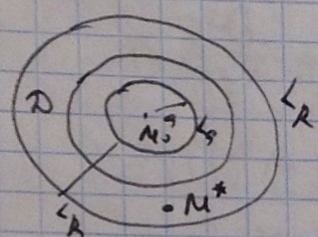
$\Delta \delta = 0 \quad (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}$
 $\delta(x, y) = 0 \quad (x, y) \in L$

$|\delta(x, y)| \leq M = M_1 + M_2 \quad \forall (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}$

Док-м, что $\delta(x, y) \equiv 0 \quad (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}$

От противного: $\exists M^*(x^*, y^*) : \delta(x^*, y^*) = A > 0 \quad (x^*, y^*) \in E^2 \setminus \bar{D}$

- Возьмем a : окр-та L_a с ц. в $M_0(x_0, y_0) \subset D$,
 R : окр-та L_R содр-м. D и M^*



Введем ф-ию $\omega_R(x, y) = M \cdot \frac{\ln \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{a}}{\ln \frac{R}{a}}$

- Видно, что
- 1) $\omega_R(x, y) \in C(E^2 \setminus \bar{D})$
 - 2) $\omega_R(x, y) = 0 \quad \forall E^2 \setminus \bar{D}$
 - 3) $\omega_R(x, y) > 0 \quad \forall L$
 - 4) $\omega_R(x, y) = M \quad \forall L$

$\Rightarrow |\delta(x, y)| \leq \omega_R(x, y), \quad (x, y) \in L$

$|\delta(x, y)| \leq M = \omega_R(x, y), \quad (x, y) \in L_R$

$\Rightarrow$ применяем принцип макс $\Rightarrow$ $\delta(x, y) \equiv 0$ (окр. внутри L и снаружи L_R)

$|\delta(x, y)| \leq \omega_R(x, y), \quad (x, y) \in D \cup L_R$

$\Rightarrow |\delta(x^*, y^*)| \leq \omega_R(x^*, y^*) = M \cdot \frac{\ln \frac{\sqrt{(x^*-x_0)^2 + (y^*-y_0)^2}}{a}}{\ln \frac{R}{a}}$

$R \rightarrow \infty \Rightarrow |\delta(x^*, y^*)| \leq \omega_\infty(x^*, y^*) = 0$

$\Rightarrow$ В след, что $\delta(x^*, y^*) = A > 0 \Rightarrow \delta(x, y) = 0$

Пример Откажемся от условия на ∂D

$D: x^2 + y^2 < \beta^2, \quad L: x^2 + y^2 = \beta^2$

$\Delta u = 0 \quad \forall E^2 \setminus \bar{D}$
 $u(x, y) = C = \text{const} \quad (x, y) \in L$
 $u_1(x, y) = C \neq u_2(x, y) = C + \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\beta}$ (и не окр. конст)

19) Свойство функции Грина для задачи Дирихле.

 E^3

$$\left(\begin{array}{c} \Omega \\ \cdot M \end{array} \right) \Sigma \quad M(x, y, z), P(\xi, \eta, \rho)$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{в } \Omega \\ u &= \mu & \text{на } \Sigma \end{aligned}$$

Опр Функция $G(M, P)$ — функция Грина для внутр. задачи Дирихле в Ω , если $\forall$ фиксир $M \in \Omega$ как функция (ξ, η, ρ) она такова, что

$$1) \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2} = 0 \quad \forall P \in \Omega, P \neq M$$

$$2) G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + S(M, P)$$

$$3) G(M, P) = 0 \quad \forall P \in \Sigma \quad \text{— гармонич}$$

Если у нас есть реш. зад. Дирихле и есть г-но Грина, то $u(M) = - \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial G}{\partial n}(M, P) d\sigma_P$

$$\frac{\partial S}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi R_{MP}}, \bar{z}$$

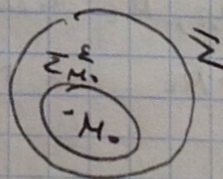
Св-ва ф-ии Грина

$$1^0 G(M, P) > 0, M, P \in \Omega$$

►] M_0 — фиксир 1.) Ω

$$\text{Пок-м, что } G(M_0, P) > 0$$

$$\forall P \in \Omega, P \neq M_0$$



Окрываем M_0 сферой радиуса ϵ , с ч.в.1.) $M_0 \in \Sigma_M^{\epsilon} \subset \Omega$

Ω_{ϵ} — между $\bar{\Omega}$ и Σ_M^{ϵ}

$$G(M_0, P) \text{ гармонич в } \Omega, G(M_0, P) = 0 \quad P \in \Sigma \text{ (по опр)}$$

$$G(M_0, P) > 0 \text{ на } \Sigma_M^{\epsilon} \text{ и на } \partial\Omega \text{ (по макс. зн.)}$$

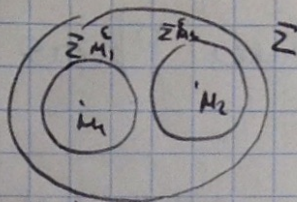
$$G(M_0, P) > 0 \text{ в } \Omega_{\epsilon} \text{ (по макс. зн.)}$$

$$\text{] } G(M_0, P^*) = 0 \Rightarrow G(M_0, P) = 0 \Rightarrow W, \text{ т.е. } G(M_0, P) > 0 \text{ на } \Sigma_M^{\epsilon}$$

$$\Rightarrow G(M_0, P) > 0$$

$$2^0 G(M, P) = G(P, M)$$

$$\forall M, P \in \Omega$$



19.2

$$\text{Док-м, что } G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$$

$$\blacktriangleright M_1, M_2 \in \Omega. \text{ А } G(M_1, P), G(M_2, P), P \in \Omega$$

Окруж. сферами радиуса ε с центрами M_1 и M_2 : $\Sigma_{M_1}^\varepsilon, \Sigma_{M_2}^\varepsilon$
 Ω_ε - обр. сфер Σ , изнутри $\Sigma_{M_1}^\varepsilon, \Sigma_{M_2}^\varepsilon$

$$\text{II} \text{ гр. Прунс: } \iiint_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - \nabla v \cdot \nabla u) d\Omega = \iint_{\Sigma} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$$

Применение к $\Omega_\varepsilon, G(M_1, P), G(M_2, P)$

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon} [G(M_1, P) \Delta G(M_2, P) - G(M_2, P) \Delta G(M_1, P)] d\Omega_P =$$

$$= \iint_{\Sigma} [G(M_1, P) \frac{\partial}{\partial n} G(M_2, P) - G(M_2, P) \frac{\partial}{\partial n} G(M_1, P)] d\sigma_P +$$

$$+ \iint_{\Sigma_{M_1}^\varepsilon} [G(M_1, P) \frac{\partial}{\partial n} G(M_2, P) - G(M_2, P) \frac{\partial}{\partial n} G(M_1, P)] d\sigma_P +$$

$$+ \iint_{\Sigma_{M_2}^\varepsilon} [G(M_1, P) \frac{\partial}{\partial n} G(M_2, P) - G(M_2, P) \frac{\partial}{\partial n} G(M_1, P)] d\sigma_P \quad (\text{т.к. } \nabla G \text{ нормальна к сферам } \Sigma_{M_i}^\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma_{M_1}^\varepsilon} [G(M_1, P) \frac{\partial}{\partial n} G(M_2, P) - G(M_2, P) \frac{\partial}{\partial n} G(M_1, P)] d\sigma_P +$$

$$+ \iint_{\Sigma_{M_2}^\varepsilon} [G(M_1, P) \frac{\partial}{\partial n} G(M_2, P) - G(M_2, P) \frac{\partial}{\partial n} G(M_1, P)] d\sigma_P = 0$$

(*) если M_1 - внутренняя точка, M_2 - граничная, все сходило к нулю, что и ожидалось
 M_1 $(M_1)^P$ $\bullet M_2$ и тут еще сходило к нулю, т.к. $G = \frac{1}{4\pi k R} + \delta$

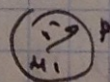
$$(\bullet M_1)^P \quad G(M_2, P) \rightarrow G(M_2, M_1) \text{ т.е. — константа}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G(M_1, P) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi k R} + \delta \right) = \frac{1}{4\pi k R^2} + \frac{\partial}{\partial n} (\delta)$$

$$M_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{r} = \left\{ \frac{x_1 - x_2}{R_{M_1 P}}, \frac{y_1 - y_2}{R_{M_1 P}}, \frac{z_1 - z_2}{R_{M_1 P}} \right\}$$

$$\text{grad } \frac{1}{R_{M_1 P}}$$



$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R_{M_1 P}} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - x_2}{R_{M_1 P}^3} \right)$$

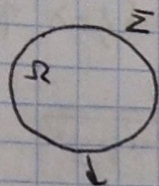
$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_1 P}} \right) = \frac{1}{R_{M_1 P}^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow -G(M_2, M_1) + G(M_1, M_2) = 0$$

20) Потенциалы простого и двойного слоев. Потенциал двойного слоя с единичной плотностью.

20.1

E³

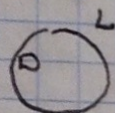


"посади" на Σ какой-то заряд, эта штука создаёт какое-то поле

Потенциал простого слоя $S(M) = \iint_{\Sigma} g(P) \cdot \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P$

Потенциал двойного слоя $u(M) = - \iint_{\Sigma} f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P$

E²



Потенциал простого слоя $S(M) = \int_L g(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} d\ell_P$

Потенциал двойного слоя $u(M) = - \int_L f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) d\ell_P$

$$\Delta S(M) = \iint_{\Sigma} g(P) \Delta \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = 0$$

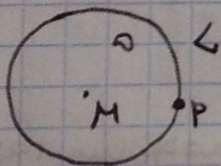
$$\Delta u(M) = \int_L f(P) \Delta \left(\frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) \right) d\ell_P = 0$$

$$\Delta u(M) = \int_L f(P) \Delta \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) d\ell_P = \int_L f(P) \frac{\partial}{\partial n} \Delta \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) d\ell_P = 0$$

Покажем, что $\forall M \notin \Sigma \quad \Delta S \equiv \Delta u \equiv 0$.

Потенциал двойного слоя на плоскости.

L - нек. замкнутая кривая, охватывающая $(\cdot) M(x, y)$



$$S(M) = \int_L g(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} d\ell_P \quad \text{— простого слоя}$$

$$u(M) = - \int_L f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) d\ell_P$$

$$u(M) = \int_L f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln r_{MP} \right) d\ell_P \quad \text{— двойного слоя}$$

Потенциалы-гармонич. ф.-и.

g, f — плотности потенциалов

Предположим радиус R и центр O (в кес. системе) ее касательных.

20.2

Преобразуем $\frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{MP})$:

$$\vec{MP} = (z-x, y-y)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\ln \sqrt{(z-x)^2 + (y-y)^2}) = \frac{1}{2} \frac{2(z-x)}{\sqrt{(z-x)^2 + (y-y)^2}} = \frac{z-x}{\sqrt{(z-x)^2 + (y-y)^2}}$$

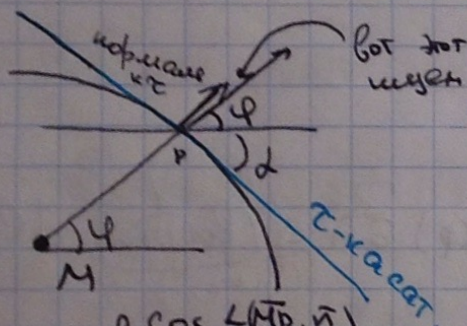
$$\frac{\partial}{\partial y} (\ln \sqrt{(z-x)^2 + (y-y)^2}) = \frac{1}{2} \frac{2(y-y)}{\sqrt{(z-x)^2 + (y-y)^2}} = \frac{y-y}{\sqrt{(z-x)^2 + (y-y)^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{MP}) = \frac{(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}^2} = \frac{r_{MP} \cdot 1 \cdot \cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}^2} = \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}}$$

$$\text{т.о. } u(M) = \int_G f(p) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} d\sigma_p$$

Потенциал двойного слоя с единичной плотностью $f(p)=1$

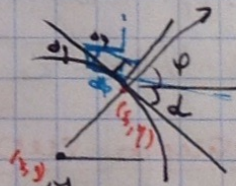
$$u_e(M) = \int_G \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} d\sigma_p \equiv$$



$$\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha$$

$$\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - \varphi) = \sin(\alpha + \varphi)$$

$$u_e = \int_G \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} d\sigma_p$$



$$\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n}) = \sin(\alpha + \varphi) d\sigma_p = \sin \alpha \cos \varphi d\sigma_p + \cos \alpha \sin \varphi d\sigma_p =$$

$$= dy \cdot \cos \varphi + dz \cdot \sin \varphi \equiv$$

$$P(\xi, \eta) \quad \begin{cases} \xi = r(\varphi) \cos \varphi \\ \eta = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

$r(\varphi)$ - в полярных координатах

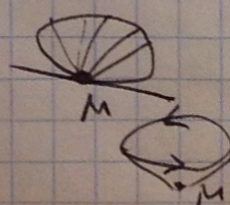
$$\begin{aligned} d\xi &= [r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi] d\varphi \\ d\eta &= [r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi] d\varphi \end{aligned}$$

$$\equiv [r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \cos \varphi - r'(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + r(\varphi) \sin^2 \varphi] d\varphi$$

$$= r(\varphi) d\varphi$$

$$\equiv \int_0^{2\pi} \frac{r(\varphi) d\varphi}{r(\varphi)} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$\text{т.е. } u_e(M) = \begin{cases} 2\pi, & M \in \Omega \\ \pi, & M \in L \\ 0, & M \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \end{cases}$$



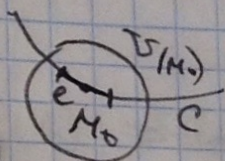
направление угла π

$$F(M, P) \quad M = (x, y) \quad P(\xi, \eta)$$

Ненпр $\forall M, P, \text{ т.ч. } M \neq P$

$$\oint_C F(M, P) d\ell_P = G(M)$$

Опр Унтефан $\oint_C F(M, P) d\ell_P$ - p/m cх-се в (.) $M_0 \in \mathbb{C}$,
есам $\forall \varepsilon > 0$ ох-то $\exists V(M_0)$ адгыз в $M_0 \in \mathbb{C} \in V(M_0)$, то
 $|\oint_C F(M, P) d\ell_P| < \varepsilon \quad \forall M \in V(M_0)$



∇ Есам унтефан $\oint_C F(M, P) d\ell_P$ p/m cх-се в (.) $M_0 \in \mathbb{C}$, то
он ненпривен в (.) M_0

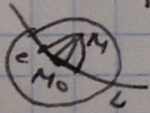
Δ (.) $M_0 \in \mathbb{C}$

$$u(M) = \oint_C F(P) \frac{\cos \angle(MP, n)}{r_{MP}} d\ell_P$$

$$u_0(M) = \oint_C F(M_0) \frac{\cos \angle(M_0P, n)}{r_{M_0P}} d\ell_P$$

$$\Delta \quad \delta(M) = u(M) - u_0(M)$$

∇ Есам ф-ия $F(M)$ ненпр в (.) $M_0 \in \mathbb{C}$, то ф-ия $\delta(M)$ ненпр. в (.) M_0



$$\Delta \quad \delta(M) = \oint_C [F(P) - F(M_0)] \frac{\cos \angle(MP, n)}{r_{MP}} d\ell_P \equiv$$

Док-м, то $\oint$ ненпр, т.е. p/m cх-се

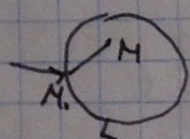
Уз ненпр-ти F в $M_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ох-то (.) $M_0 - V(M_0)$:

$|F(P) - F(M_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$. Дие M вх-едем ненпр. кофа (M-н-пох-е)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \oint_C [F(z/P) - F(z/M_0)] d\varphi \right| &\leq \left| \oint_C |F(z/P) - F(z/M_0)| d\varphi \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \left| \oint_C d\varphi \right| = \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot 2\pi = \varepsilon \Rightarrow \text{ненпр} \end{aligned}$$

$\int f(M)$ непрерыв. на L . Тогда $\forall M_0 \in L$

$$\int \lim_{M \rightarrow M_0} u_{\text{внут}}(M) = u_{\text{внут}}(M_0), \quad \int \lim_{M \rightarrow M_0} u_{\text{наруж}}(M) = u_{\text{наруж}}(M_0)$$



Кроме того $u_{\text{вн}}(M_0) = u(M_0) + \pi f(M_0) (*)$

$$u_{\text{н}}(M_0) = u(M_0) - \pi f(M_0) (**)$$

$$\blacktriangleright \lim_{M \rightarrow M_0} u_{\text{вн}}(M) = \lim_{M \rightarrow M_0} [\int f(M) + u_0(M)] =$$

↑
непрерывно
скачок непрерыв.

↑
непрерывно

$$u_0(M) = \int f(M_0) 2\pi, \quad M \in D$$

$$= \int f(M_0) + \int f(M_0) 2\pi = u(M_0) + 2\pi \int f(M_0) - \int f(M_0) 2\pi =$$

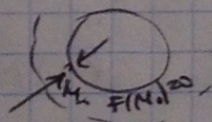
$$// u_0(M_0) = \int f(M_0) \pi$$

$$= u(M_0) - \pi f(M_0) + 2\pi f(M_0) = u(M_0) + \pi f(M_0) \Rightarrow (*) \text{ ok.}$$

$$\bullet \lim_{M \rightarrow M_0} u_{\text{н}}(M) = \lim_{M \rightarrow M_0} [\int f(M) + u_0(M)] = \int f(M_0) + \int f(M_0) \cdot 0 =$$

$$= u(M_0) - u_0(M_0) - 0 = u(M_0) - \pi f(M_0) - 0 = u(M_0) - \pi f(M_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{ok-ан } (**)$



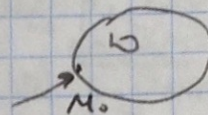
21) Сведение внутр. задачи Дирихле к интегральному уравнению Фредгольма 2 рода.

★ внутр. з. Дирихле.

$$u \in C(\bar{D}), u \in C^2(D), \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ u(x, y) = \mu(x, y) \quad (x, y) \in L$$

Определим $u(x, y)$ так, что $u(x, y)$

$$u(M) = \begin{cases} \int_D f(p) \frac{\cos \angle(MP, n)}{r_{MP}} d\sigma_p, & M \in D \\ \pi f(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle(MP, n)}{r_{MP}} d\sigma_p, & M \in L \end{cases}$$



$$(1) \quad \pi f(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle(MP, n)}{r_{MP}} d\sigma_p = \mu(M), \quad M \in L$$

интегральное ур-ие Фредгольма 2 рода

▷ Фредгольм

Если ур-ие (1) имеет только нулевое решение (в классе непрерыв. ф-ций) при $\mu=0$, то неоднород. ур-ие имеет непрерыв. решение (единств. в силу леммы) при $\forall$ непрерыв. $\mu(M)$.

22) Существование решения внутренней задачи Дирихле.

22.1

Т) $\exists$ решения внутр. зад. Дирихле.

$\forall u \in C(\bar{D}), u \in C^2(D), \Delta u = 0$ в $D, u(x, y) = \mu(x, y) \quad (x, y) \in L$

Если $\mu(M)$ непрерывна на $L \Rightarrow \exists$ реш. внутр. зад. Дирихле.

► Дост-но док-ти, что ур-ие $\pi f(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle(M\bar{p}, \bar{n})}{r_{MOp}} d\bar{p} = 0$

$M \in L$ имеет только нулевое решение в классе непрерывных. (х) (у) (з) (и) (к) (л) (м) (н) (о) (п) (р) (с) (т) (у) (ф) (х) (ц) (ч) (ш) (щ) (э) (ю) (я)

$\pi f(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle(M\bar{p}, \bar{n})}{r_{MOp}} d\bar{p} = \mu(M), M \in L$ имеет только нулевое решение при $\mu = 0$, то неоднор. ур-ие имеет ~~свои~~ непрерыв. реш. при $\neq$ непрерыв. $\mu(M)$. *

~~Докажем, что $\exists f(M) \equiv 0$~~

Значит ^{возможна} (1) $M_0 \in L: f(M_0) = \max_{M \in L} |f(M)| > 0$ ~~т.к.~~

По ф-ле Даламбера потеч. е. $\Delta u = 0$ н.л.-то: $\Delta u = 0$

$$\pi f(M_0) = \int_L f(M_0) \frac{\cos \angle(M_0\bar{p}, \bar{n})}{r_{M_0Op}} d\bar{p}, M_0 \in L$$

т.к. $f(M)$ - решение (*) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi f(M_0) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle(M_0\bar{p}, \bar{n})}{r_{M_0Op}} d\bar{p} = 0$$

$$\Rightarrow \int_L |f(p) + f(M_0)| \frac{\cos \angle(M_0\bar{p}, \bar{n})}{r_{M_0Op}} d\bar{p} = 0$$

Из опр-ия $M_0: |f(M_0)| \geq |f(p)| \quad \forall p \in L$ и $\cos \angle(M_0\bar{p}, \bar{n}) > 0$

$$\frac{\cos \angle(M_0\bar{p}, \bar{n})}{r_{M_0Op}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{p}} > 0$$

$$\Rightarrow f(M_0) + f(p) \equiv 0$$

Берем $M = P = M_0 \Rightarrow f(M_0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

23) Уравнение колебаний. Постановка задачи 23.1

Колебание струны

Ур-ие колебания $u(x, t)$ ← материальн. струна

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Струна $u(x, t)$ — колеблется в $\mathbb{R}^1$

$$u(x, t) \in C^2((x, t): 0 < x < l, t > 0)$$

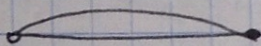
// $u(x, y, t): u_{tt} = a^2 \Delta u(x, y) \in \mathbb{R}^n, t > 0$ — ур-ие колеб. упруг. мембраны.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T$$

Начальные

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq l$$



1) В нач. мом. струну оттягиваем, чтобы отпустить

2) ψ — это лев. в нач. мом.т. прав.е. кануло в прошл.

Крайние (граничные) условия

$$x=0$$

$$(1) u(0, t) = \mu(t)$$

$$(2) u_x(0, t) = \nu(t)$$

$$(3) u(0, t) + \lambda u_x(0, t) = \theta(t)$$

$$x=l$$

$$(1) u(l, t) = \mu(t)$$

$$(2) u_x(l, t) = \nu(t)$$

$$(3) u(l, t) + \lambda u_x(l, t) = \theta(t)$$

Чтобы написать краевую задачу, выберем по одному усл. из каждого списка.

I краевые задачи

23.2

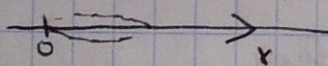
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < l \\ & 0 \leq t \leq T \\ u(0, t) = \mu_1(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(l, t) = \mu_2(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

II краевые задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < l \\ & 0 \leq t \leq T \\ u_x(0, t) = \nu_1(t) & 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = \nu_2(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Задачи на разрывности

I краевая задача



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x > 0 \\ & 0 \leq t \leq T \\ u(0, t) = \mu(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \geq 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

II краевая задача

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x > 0 \\ & 0 \leq t \leq T \\ u_x(0, t) = \nu(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \geq 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

Задачи на разрывности (Задачи Коши)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

24.1
 24) Формулы Даламбера. З. и устойчивое решение задачи Коши для уравнения колебания

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & -\infty < x < +\infty \\ & t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u_t(x, 0) = \psi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (3)$$

x, t . Введём новые переменные $\xi = x + at, \eta = x - at$

$$\Rightarrow x = \frac{\xi + \eta}{2}, t = \frac{\xi - \eta}{2a} \quad a > 0 - \text{const.}$$

• Введём ф-ю, зависящую от этих переменных

$$S(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right)$$

$$\xi = x + at, \eta = x - at$$

• Функция u удовлетв. (1). Какому ур-ию будет удовлетв. S ?

$$S_\xi(\xi, \eta) = u_x\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \cdot \frac{1}{2} + u_t\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \cdot \frac{1}{2a}$$

$$\begin{aligned} S_{\xi\xi}(\xi, \eta) &= u_{xx}\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \cdot \frac{1}{4} + u_{xt}\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4a}\right) + u_{tx}\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \cdot \frac{1}{4a} + \\ &+ u_{tt}\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4a^2}\right) = u_{xx}\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \cdot \frac{1}{4} - u_{tt}\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \cdot \frac{1}{4a^2} = \\ &= \frac{1}{4a^2} (a^2 u_{xx} - u_{tt}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{\xi\xi}(\xi, \eta) = 0}$$

$$S_\xi(\xi, \eta) = \bar{f}(\xi)$$

$$S(\xi, \eta) = \int \bar{f}(\xi) d\xi + \bar{f}(\eta) = \underbrace{\int \bar{f}(\xi) d\xi}_{\text{неопред. интегр.}} + \bar{f}(\eta)$$

$$\text{т.е. } S(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

$$u(x, t) = S(\underbrace{x+at}_{\xi}, \underbrace{x-at}_{\eta})$$

$$\boxed{u(x, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)}$$

Вспом. кр. условие

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = a \cdot f_1'(x) - a \cdot f_2'(x) \quad \text{! т.к. условие на } t \text{ и когда } t=0!$$

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + c \end{cases} \Rightarrow \text{находим } f_1 \text{ и } f_2$$

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + \frac{c}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2}$$

Подст. в $u(x, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$. Внесем $x \rightarrow x+at$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{c}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2} = \\ &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad \begin{matrix} \text{Формула} \\ \text{Даламбера} \end{matrix}$$

Существование и единственность

$\square \varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда гр-ые $u(x, t)$, опред.

формулой (4): $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ и удовл.

и) - (3) (т.е. явл. рещ. 3к).

► $\square$ следует из гр-ые (4), т.к. там всё хорошо, всё дифер. и т.п.

! следует из наших рассуждений об этом, или от чего-то стартовали, получили (4) как рез-т интерпрет. исходной задачи.

Устойчивости

24.3

$$\varphi_i \in C^2(\mathbb{R}), \varphi_i \in C^1(\mathbb{R}) \quad i=1,2$$

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq C, |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq C, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t \in [0, T]}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

где $u_i(x, t)$ - реш. ЗК с $\varphi_i(x)$ и $\varphi_i(x)$ $i=1,2$.

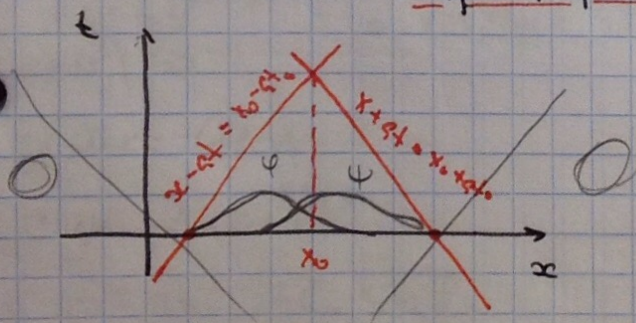
$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t \in [0, T]}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t \in [0, T]}} \left| \frac{\varphi_1(x+st) - \varphi_2(x+st)}{2} + \frac{\varphi_1(x-st) - \varphi_2(x-st)}{2} \right|$$

$$+ \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t \in [0, T]}} \left| \frac{1}{2s} \int_{x-st}^{x+st} |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| d\xi \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

этот интеграл от const
 $\Rightarrow$ константа
 $x+st - (x-st) = 2st$
 берем max по T
 $\frac{1}{2s} \cdot 2s \cdot T \cdot \sup |\varphi_1 - \varphi_2|$

Физический смысл формулы Даламбера.

$x+st = c_1$
 $x-st = c_2$
 Если будем менять const c_1 и c_2 , то получаем 2 семейства прямых.
 Это характеристики



Хотим найти константы Даламбера
 найти реш. ЗК в (x_0, t_0)

$$\begin{aligned} x+st &= x_0+st_0 \\ x-st &= x_0-st_0 \end{aligned} \quad \text{где } (x_0, t_0)$$

Получаем систему 2х2

Значение функции внутри х.д.т.р
 определен. значением из ее оснований.

25) Метод разделения переменных для
 док-ва $\exists$ решения I кр. задачи для
 уравнения колебаний.

(1) $u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < l, t > 0$

(2) $u(0, t) = 0$

(3) $u(l, t) = 0 \quad t \geq 0$

(4) $u(x, 0) = \varphi(x)$

(5) $u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq l$

Метод разделения переменных.

$$S(x, t) = X(x)T(t)$$

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \quad | : a^2 X(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow 2 \text{ задачи}$$

$\textcircled{I} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$
 $\textcircled{II} T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad t \geq 0$

Если $X(x)$ - реш I, а $T(t)$ - реш II $\Rightarrow X(x) \cdot T(t)$ - реш (1) $\Rightarrow$ (F)

$\bullet X''(x) + \lambda X(x) = 0$
 $X(0) = 0 \Rightarrow (2), (3) \textcircled{F}$
 $X(l) = 0$

$\bullet T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$

$T_n(t) = \tilde{c}_n \cdot \sin \frac{\pi n}{2} a t + \tilde{b}_n \cos \frac{\pi n}{2} a t$

Задача $\underline{U-1}$.

с.з.ч. $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2$

с.р. $X_n(x) = \tilde{c}_n \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x$

$n = 1, 2, \dots$

$$S_n(x, t) = \left[\underbrace{\tilde{c}_n}_{\tilde{c}_n - \tilde{c}_n} \sin \frac{\pi n}{2} a t + \underbrace{\tilde{b}_n}_{\tilde{c}_n - \tilde{b}_n} \cos \frac{\pi n}{2} a t \right] \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x$$

$n = 1, 2, \dots$
 Это функ. (1) - (3)

Запишем в н.у. Ущем реш. в виде:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x, t)$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cdot \cos \frac{\pi n}{l} a t \cdot \frac{\pi n}{l} a - b_n \cdot \sin \frac{\pi n}{l} a t \cdot \frac{\pi n}{l} a] \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \frac{\pi n}{l} a \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x) \Rightarrow \text{по формуле Тейлора} \Rightarrow b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \frac{\pi n}{l} a \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x) \Rightarrow c_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \cdot \sin \frac{\pi n}{l} a t + \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \cdot \cos \frac{\pi n}{l} a t \right] \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x$$

(6)

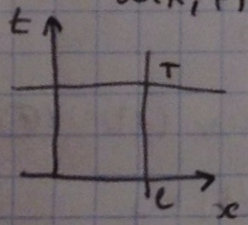
$$\nabla \quad] \varphi \in C^3[0; l], \psi \in C^2[0; l]$$

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

$$\psi(0) = \psi(l) = 0$$

Тогда $u(x, t)$ опр. формулой (6):

$u(x, t) \in C^2([0, l] \times \mathbb{R}^+)$ и $u(x, t)$ удовн (1) - (5)
условие непрерывности



// Если хотим док-ть, что все хорошо для $t \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ можно взять какое-либо T и для такого
пр-ка все хорошо (T-пробл)

► (6) отличается от тем-ти тем, что там ермитаевой экв. задавался ерв, которое было y'' , а тут $\sin$ и $\cos$, которые конейн $\Rightarrow$ сн-ть рядов одесней. зс средн коэф. φ_n и ψ_n

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds = \frac{2}{l} \left(-\frac{l}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{l} \varphi(s) \Big|_0^l + \frac{2}{\pi n} \int_0^l \varphi'(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \cdot \frac{l}{\pi n} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} s \varphi'(s) \Big|_0^l - \frac{2l}{(\pi n)^2} \int_0^l \varphi''(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds =$$

$$= \frac{2l}{(\pi n)^2} \cdot \frac{l}{\pi n} \varphi''(s) \cdot \cos \frac{\pi n}{l} s \Big|_0^l - \frac{2l^2}{(\pi n)^3} \int_0^l \varphi'''(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds$$

$$\therefore \varphi_n = - \frac{2l^2}{(\pi n)^3} \int_0^l \varphi'''(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds$$

Итого: каждый член ряда (6) удов. ур-ию,
кр. усл., т.е. можно сказать, что (1)-(3) выполнены.

25.4

Осталось проверить выполнение кр. условий

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{2} s ds \sin \frac{n\pi}{2} x = \varphi(x) \quad \text{т.к. } \varphi(x) \text{ — ф-ция, то и } \sin \frac{n\pi}{2} x \text{ — период.}$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{2} s ds \sin \frac{n\pi}{2} x = \varphi(x) \quad \text{т.к. } \varphi(x) \text{ — ф-ция, то и } \sin \frac{n\pi}{2} x \text{ — период.}$$

т.е. выполнены кр. усл. (4), (5)

Физический смысл (полученного нами решения)

Струна идеальная (колеблется вечно, не меняет период и т.д.)

Т.е. T — период. Из какое время струна вернется
снова в исход.

$$\sin \frac{\pi}{2} \omega (t+T) = \sin \frac{\pi}{2} \omega t \cos \frac{\pi}{2} \omega T + \cos \frac{\pi}{2} \omega t \sin \frac{\pi}{2} \omega T$$

$$\frac{\pi}{2} \omega T = \pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

26) Интервал энергии. Теорема единственности 26.1

решения краевых задач для уравнения колебаний.

I кр. задача:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad \Gamma = \{(x, t) | x \in [0, l], t \in [0, T]\}$$

Теорема единственности.

$$\begin{aligned} & \text{I } u_i(x, t): u_i \in C^2[\Gamma] \\ & \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \Gamma \\ & u_i(0, t) = \mu_1(t), \quad u_i(l, t) = \mu_2(t) \\ & u_i(x, 0) = \varphi(x) \\ & \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

Тогда $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в Γ

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \Delta \delta(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \Rightarrow & \begin{cases} \delta_{tt} = a^2 \delta_{xx} & (x, t) \in \Gamma \\ \delta(0, t) = \delta(l, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ \delta(x, 0) = 0 \\ \delta_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq l \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Delta \boxed{I(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [\delta_t(x, t)^2 + a^2 (\delta_x(x, t))^2] dx} \quad \text{интервал энергии, кол-во энергии, циркуля}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_0^l [\delta_t(x, t) \delta_{tt}(x, t) + a^2 \delta_x(x, t) \delta_{xt}(x, t)] dx = \\ &= \int_0^l [\delta_t(x, t) \delta_{tt}(x, t) - a^2 \delta_{xx}(x, t) \delta_t(x, t)] dx + a^2 \delta_x(x, t) \delta_t(x, t) \Big|_{x=0}^{x=l} \\ \frac{dI}{dt} &= a^2 \delta_x(x, t) \delta_t(x, t) \Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l \delta_t(x, t) [\delta_{tt}(x, t) - a^2 \delta_{xx}(x, t)] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{т.к.} \\ & \delta(l, t) = 0 \Rightarrow \delta_t(l, t) = 0 \\ & \delta(0, t) = 0 \Rightarrow \delta_t(0, t) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I'(t) = 0 \Rightarrow \boxed{I(t) = \text{const.}}$$

(т.к. циркуля сохраняется, то энергия не ~~изменяется~~ и ~~не~~ ~~уменьшается~~ и ~~не~~ ~~увеличивается~~)

4 нач. условия

26.2

$$I(0) = \frac{1}{2} \int_0^l [(\underbrace{v_t(x,0)}_{=0 \text{ н.у.}})^2 + a^2 (\underbrace{v_x(x,0)}_{=0 \text{ т.к. } v(x,0)=0 \Rightarrow v_x(x,0)=0})^2] dx \Rightarrow I(0) = 0$$

а т.к. $I(t) = \text{const} \Rightarrow$

$\Rightarrow I(t) = 0.$

$v_t(x,t) = v_x(x,t) = 0 \quad (x,t) \in \Pi \Rightarrow v(x,t) = \text{const} \text{ в } \Pi$

А т.к. $v(0,t) = 0 = v(l,t) = 0 \Rightarrow v(x,t) = 0 \text{ в } \Pi \Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t)$



Справедливо и для 2-й фазовой задачи:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v_x(0,t) = 0 \\ v_x(l,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

то же самое, даже проще:

$$\frac{dI}{dt} = a^2 \underbrace{v_x(x,t)}_{=0} \cdot v_t(x,t) \Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l \dots$$

27) Задача с данными на характеристиках.

27.1

Эквивалентная система интегральных уравнений.

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

$$a_{11}(x,y)(dy)^2 - 2a_{12}(x,y)dx dy + a_{22}(x,y)(dx)^2 = 0$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \begin{matrix} x+at=c \\ x-at=c \end{matrix} \quad \text{т.к.}$$

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} - u_{tt} &= 0 & (adt-dx)=0 & \Rightarrow d(x-at)=0 & \Rightarrow x-at=c \\ a^2 (dt)^2 - (dx)^2 &= 0 & (adt+dx)=0 & \Rightarrow d(x+at)=0 & \Rightarrow x+at=c \end{aligned}$$

Когда вводим гр-цу Даламбера:

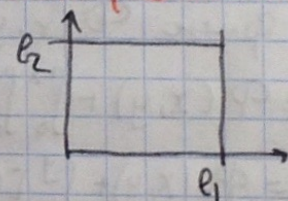
$$\xi = x+at$$

$$\eta = x-at$$

$$\xi\eta = 0, \quad u_{tt} = a^2 u_{xx} \text{ — канонич. гр-ца уравн. колеб.}$$

Задача с данными на характеристиках (Задача Пуассона)

$$\square Q = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$$



А заданы для $u(x,y)$

$$1) \begin{cases} u_{xy} = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + f(x,y,u(x,y)) \end{cases} \quad (x,y) \in Q$$

$$2) \begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l_1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} u(0,y) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq l_2 \end{cases}$$

По своим характеристикам упр-е имеет вид

$$dx dy = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = \text{const} \\ y = \text{const} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \text{семейство линий} \\ \text{такого вида} \end{matrix} \right\}$$

$$x=0$$

$$y=0$$

то на хр-ти, поэтому мы можем задать на них условие. (напр. $u(x,0)$ задается данными на хр-ти $x=0, y=0$).

Условие 1 $a, b \in C[Q]$
 $f(x,y,p) \in C[Q \times \mathbb{R}]$

Усл. Липшица: $|f(x,y,p_1) - f(x,y,p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$
 $\forall (x,y,p_1), (x,y,p_2) \in Q \times \mathbb{R}$

$$\varphi \in C'[0;l_1], \quad \psi \in C'[0;l_2], \quad \varphi(0) = \psi(0)$$

Опр Функция $u(x, y)$ - решение задачи (1)-(3),

27.2

если 1) $u, u_x, u_y, u_{xy} \in C[\bar{Q}]$

2) $u(x, y)$ удовле. (1)-(3).

Эквивалентные системы интегральных уравнений.

И выполнено усл. 1 и $u(x, y)$ - реш. зад. (1)-(3)

• Проинтегрируем (1) по y : $\int_0^y y \leftrightarrow \eta$

$$u_x(x, y) - u_x(x, 0) = \int_0^y [a(x, \eta) u_x(x, \eta) + b(x, \eta) u_y(x, \eta) + f(x, \eta, u(x, \eta))] d\eta$$

тут u_x, u_y т.к. u имеет в виду производную по x и y ищем так удобнее

• Проинтегрируем по x : $\int_0^x x \leftrightarrow \xi$

$$u(x, y) - u(0, y) = u(x, 0) - u(0, 0) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta) u_x(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) u_y(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))] d\eta d\xi$$

Введем ф-ию $\Phi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0)$

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta) u_x(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) u_y(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))] d\eta d\xi$$

$$u_x(x, y) = \Phi_x(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta) u_x(x, \eta) + b(x, \eta) u_y(x, \eta) + f(x, \eta, u(x, \eta))] d\eta$$

$$u_y(x, y) = \Phi_y(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y) u_x(\xi, y) + b(\xi, y) u_y(\xi, y) + f(\xi, y, u(\xi, y))] d\xi$$

$$u(x, y)$$

$$\delta = u_x(x, y) \in C[\bar{Q}]$$

$$\omega = u_y(x, y)$$

$$(4) u(x, y) = \Phi(x, y) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta) \delta(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) \omega(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))] d\eta d\xi$$

$$(5) \delta(x, y) = \Phi_x(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta) \delta(x, \eta) + b(x, \eta) \omega(x, \eta) + f(x, \eta, u(x, \eta))] d\eta$$

$$(6) \omega(x, y) = \Phi_y(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y) \delta(\xi, y) + b(\xi, y) \omega(\xi, y) + f(\xi, y, u(\xi, y))] d\xi$$

Обратно $\exists u, \delta, \omega \in C[\bar{Q}]$ и удовле. (4)-(6)

Тогда $u, u_x, u_y, u_{xy} \in C[\bar{Q}]$

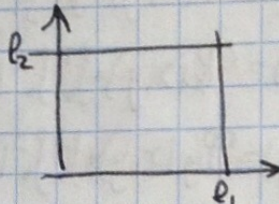
$u_x = \delta, u_y = \omega$ и если потем производя по $x, y \Rightarrow \Rightarrow u(x, y)$ - реш (1)-(3).

* Проверим одно из к.у, т.к. satisfied

$$u(x, 0) = \Phi(x, 0) = \varphi(x) + \psi(0) - \varphi(0) = \varphi(x).$$

28) $\exists$ решение задачи с данными на характеристиках.

28.1

$$\Gamma \quad \varphi = h(x, y), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2$$


А заданы дано $u(x, y)$.

$$(1) \quad u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + f(x, y, u(x, y)) \quad (x, y) \in Q$$

$$(2) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$(3) \quad u(0, y) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq l_2$$

$dx dy = 0 \Rightarrow$ семейство прямых $\begin{matrix} x = \text{const} \\ y = \text{const} \end{matrix}$.

т.о. $u(x, y)$ задается данными на $x=0, y=0$.

Условия I $a, b \in C[\Gamma]$

$$f(x, y, p) \in C[Q \times \mathbb{R}]$$

Усл. Липшица $|f(x, y, p_1) - f(x, y, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$

$$\varphi \in C^1[0; l_1], \quad \psi \in C^1[0; l_2], \quad \varphi(0) = \psi(0).$$

Опр. Функция $u(x, y)$ - решение задачи (1)-(3), если

$$\bullet u, u_x, u_y, u_{xy} \in C[\Gamma]$$

$$\bullet u(x, y) \text{ удовл. (1)-(3).}$$

Существование

$\exists$ выполнены условия I. Тогда $\exists u(x, y)$, явн-се решением зад (1)-(3).

► Док-н, что $\exists u, \delta, \omega \in C[\Gamma]$, явн-се рещ. (1)-(3).

$$I \quad \varphi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0)$$

$$II \quad u(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)\delta(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)\omega(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))] d\xi d\eta$$

$$III \quad \delta(x, y) = \varphi_x(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta)\delta(x, \eta) + b(x, \eta)\omega(x, \eta) + f(x, \eta, u(x, \eta))] d\eta$$

$$IV \quad \omega(x, y) = \varphi_y(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y)\delta(\xi, y) + b(\xi, y)\omega(\xi, y) + f(\xi, y, u(\xi, y))] d\xi$$

А пока-т ф-ии $u_0(x, y) = 0, \delta_0(x, y) = 0, \omega_0(x, y) = 0$

$$(4') u_n(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)]$$

$$(4'') u_n(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta) S_{n-1}(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) \omega_{n-1}(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u_{n-1}(\xi, \eta))] d\eta d\xi$$

$$(5'') S_n(x, y) = \varphi_x(x, y) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta) S_{n-1}(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) \omega_{n-1}(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u_{n-1}(\xi, \eta))] d\eta d\xi$$

$$(6'') \omega_n(x, y) = \varphi_y(x, y) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta) S_{n-1}(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) \omega_{n-1}(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u_{n-1}(\xi, \eta))] d\eta d\xi$$

a, b, f все непрерывны; т.к. все иррациональные числа непрерывны $\Rightarrow$ то, что число тоже непрерывно. (иначе не было бы "плотности")

$$u_1(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, 0) d\eta d\xi$$

$$B = \max \{ |u_1(x, y)| + |S_1(x, y)| + |\omega_1(x, y)| \}$$

$$M = \max \{ \max_Q |a(x, y)|, \max_Q |b(x, y)|, L \}$$

$$\bullet |u_1(x, y) - u_0(x, y)| \leq B$$

$$|S_1(x, y) - S_0(x, y)| \leq B \quad (x, y) \in Q$$

$$|\omega_1(x, y) - \omega_0(x, y)| \leq B$$

$$\bullet |u_2(x, y) - u_1(x, y)| \leq \left| \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)(S_1(\xi, \eta) - S_0(\xi, \eta)) + b(\xi, \eta)(\omega_1(\xi, \eta) - \omega_0(\xi, \eta)) + L|u_1(\xi, \eta) - u_0(\xi, \eta)|] d\eta d\xi \right| \leq M \int_0^x \int_0^y [|S_1 - S_0| + |\omega_1 - \omega_0| + |u_1 - u_0|] d\eta d\xi$$

по теореме о среднем значении

$$\Rightarrow |u_2(x, y) - u_1(x, y)| \leq MBxy$$

$$\bullet |S_2(x, y) - S_1(x, y)| \leq \left| \int_0^y [|a(x, \eta)| |S_1(x, \eta) - S_0(x, \eta)| + |b(x, \eta)| |\omega_1(x, \eta) - \omega_0(x, \eta)| + L |u_1(x, \eta) - u_0(x, \eta)|] d\eta \right| \leq M \cdot \int_0^y [|S_1 - S_0| + |\omega_1 - \omega_0| + |u_1 - u_0|] d\eta \Rightarrow$$

$$\leq M \Rightarrow |S_2(x, y) - S_1(x, y)| \leq MB y$$

$$\bullet \text{ Аналогично } |\omega_2(x, y) - \omega_0(x, y)| \leq MB x$$

$$\bullet xy \leq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow |u_2(x, y) - u_1(x, y)| \leq MB \frac{(x+y)^2}{2!}$$

$$|S_2(x, y) - S_1(x, y)| \leq MB \frac{x+y}{1!}$$

$$|\omega_2(x, y) - \omega_1(x, y)| \leq MB \frac{x+y}{1!}$$

$$k = 2 + l_1 + l_2$$

по теореме о среднем значении

28.3

• Основное предположение индукции

$$|u_n(x,y) - u_{n-1}(x,y)| \leq B M^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \textcircled{+} \text{ и/или } n=2$$

$$|\delta_n(x,y) - \delta_{n-1}(x,y)| \leq B M^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \textcircled{+} \text{ и/или } n=2 \Rightarrow \text{и/или } n=2 \text{ верно}$$

$$|\omega_n(x,y) - \omega_{n-1}(x,y)| \leq B M^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \textcircled{+} \text{ и/или } n=2$$

Док-м для $n+1$:

$$|u_{n+1}(x,y) - u_n(x,y)| \leq (M') \text{ выносим } \text{для } x, y \text{ из } \text{этого, сразу } T, \text{ это } \leq |q_1|, |q_2|, L, M$$

$$\leq \int_0^x \int_0^y [M |\delta_n(\xi, \eta) - \delta_{n-1}(\xi, \eta)| + M |\omega_n(\xi, \eta) - \omega_{n-1}(\xi, \eta)| + M |u_n(\xi, \eta) - u_{n-1}(\xi, \eta)|] d\eta d\xi$$

$$\leq M \int_0^x \int_0^y [2 B M^{n-1} K^{n-2} \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} + B M^{n-1} K^{n-2} \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}] d\xi d\eta =$$

$$= B M^n K^{n-2} \int_0^x \int_0^y [2 \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{n!}] d\xi d\eta \leq$$

$$\leq B M^n K^{n-2} [2 \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}] \leq \text{смотрим, это надо и выносим это} \leq$$

$$\leq B M^n K^{n-2} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} [2 + \frac{(x+y)}{n+2}] \leq B M^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} (=)$$

$$2 + \frac{(x+y)}{n+2} \leq 2 + \frac{r_1 + r_2}{2+2} \leq 2 + r_1 + r_2 = K // \Rightarrow \text{Док-м для } n+1 \text{ для } u$$

Док-м для δ и ω (для обеих и тех, с.к. обеих).

$$|\delta_{n+1}(x,y) - \delta_n(x,y)| \leq |вхлг.(5')|, |q_1|, |q_2|, L, M \leq$$

$$\leq \int_0^y [M |\delta_n(x,\eta) - \delta_{n-1}(x,\eta)| + M |\omega_n(x,\eta) - \omega_{n-1}(x,\eta)| + M |u_n(x,\eta) - u_{n-1}(x,\eta)|] d\eta$$

$$\leq M \int_0^y [2 B M^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} + B M^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+\eta)^{n-1}}{n!}] d\eta \leq$$

$$\leq B M^n K^{n-2} \int_0^y [2 \frac{(x+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x+\eta)^{n-1}}{n!}] d\eta \leq B M^n K^{n-2} [2 \frac{(x+y)^n}{n!} + \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}]$$

$$\leq B M^n K^{n-2} \frac{(x+y)^n}{n!} [2 + \frac{x+y}{n+1}] \leq B M^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!} = \text{Док-м.} \leq K \text{ (оценим)}$$

$$u_n(x,y) = \sum_{m=1}^n (u_m(x,y) - u_{m-1}(x,y))$$

$$\delta_n(x,y) = \sum_{m=1}^n (\delta_m(x,y) - \delta_{m-1}(x,y))$$

$$\omega_n(x,y) = \sum_{m=1}^n (\omega_m(x,y) - \omega_{m-1}(x,y))$$

Сх-то кон-ти функции
этих-то сх-ты редс

• Если ряд $\sum_{m=1}^{\infty} (u_m(x,y) - u_{m-1}(x,y))$ сх-а п.и. $\beta(x,y) \in Q$,

то и кон-то сх-а п.и. $\beta \in Q$

$$|u_m(x,y) - u_{m-1}(x,y)| \leq B M^{m-1} K^{m-2} \frac{(r_1+r_2)^m}{m!} \leq B \frac{A^m}{m!} \text{ такой же ряд сх-а}$$

$\Rightarrow$ кон-то гр-и $u_n(x,y)$ сх-а п.и. $u_n(x,y) \Rightarrow \tilde{u}(x,y) \in C(Q)$

Аналогично

28.4

$$u_n(x, y) \Rightarrow \bar{u}(x, y) \in C[\bar{Q}]$$

$$w_n(x, y) \Rightarrow \bar{w}(x, y) \in C[\bar{Q}]$$

Переходим к пределу и получаем, что $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ - реш. сист.

$$(4) \quad \bar{u}(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^1 \int_0^y [q(\xi, \eta) \bar{v}(\xi, \eta) + r(\xi, \eta) \bar{w}(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, \bar{u}(\xi, \eta))] d\xi d\eta$$

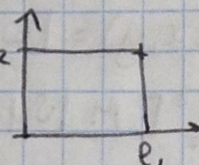
$$(5) \quad \bar{v}(x, y) = \varphi_x(x, y) + \int_0^y [q(x, \eta) \bar{v}(x, \eta) + r(x, \eta) \bar{w}(x, \eta) + f(x, \eta, \bar{u}(x, \eta))] d\eta$$

$$(6) \quad \bar{w}(x, y) = \varphi_y(x, y) + \int_0^x [q(\xi, y) \bar{v}(\xi, y) + r(\xi, y) \bar{w}(\xi, y) + f(\xi, y, \bar{u}(\xi, y))] d\xi$$

29) Единственность решения задачи с
данными на характеристиках.

29.1

$Q = \{(x, y), 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$



А заданы дано $u(x, y)$:

- (1) $u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + f(x, y, u(x, y)) \quad (x, y) \in Q$
- (2) $u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l_1$
- (3) $u(0, y) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq l_2$

$dx dy = 0 \Rightarrow$ семейство прямых $x = \text{const}$
 $y = \text{const}$

т.о. $u(x, y)$ задается данными на $x=0, y=0$

Условия I $a, b \in C[Q]$

$f(x, y, p) \in C[Q \times \mathbb{R}]$
по x, y, p

Усл. Липшица $|f(x, y, p_1) - f(x, y, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$

$\varphi \in C^1[0, l_1], \psi \in C^1[0, l_2], \varphi(0) = \psi(0)$

Опр. Функция $u(x, y)$ - решение задачи (1)-(3), если

• $u, u_x, u_y, u_{xy} \in C[Q]$

• $u(x, y)$ удовлетв (1)-(3)

$\varphi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0)$

(4) $u(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)\delta(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)\omega(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))] d\eta d\xi$

(5) $\delta(x, y) = \varphi_x(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta)\delta(x, \eta) + b(x, \eta)\omega(x, \eta) + f(x, \eta, u(x, \eta))] d\eta$

(6) $\omega(x, y) = \varphi_y(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y)\delta(\xi, y) + b(\xi, y)\omega(\xi, y) + f(\xi, y, u(\xi, y))] d\xi$

Единственности

И выполнены усл. I, тогда если $u_1(x, y), u_2(x, y)$ реш. задачи (1)-(3), то $u_1(x, y) = u_2(x, y)$ для $(x, y) \in Q$

► ~~т.е.~~ $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ реш (1)-(3) $\Rightarrow$ тройки

$\{u_1(x, y), \delta_1(x, y), \omega_1(x, y)\}$ ~~реш~~ и $\{u_2(x, y), \delta_2(x, y), \omega_2(x, y)\}$ - решения (4)-(6), где $\delta_1(x, y) = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \omega_1(x, y) = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \delta_2(x, y) = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \omega_2(x, y) = \frac{\partial u_2}{\partial y}$

Введём: $U(x, y) = |u_1(x, y) - u_2(x, y)|$

29.2

$$V(x, y) = |\delta_1(x, y) - \delta_2(x, y)|$$

$$W(x, y) = |\omega_1(x, y) - \omega_2(x, y)|$$

$$U(x, y) \leq \int_0^x \int_0^y [M |\delta_1(\xi, \eta) - \delta_2(\xi, \eta)| + M |\omega_1(\xi, \eta) - \omega_2(\xi, \eta)| + M |u_1(\xi, \eta) - u_2(\xi, \eta)|] d\eta d\xi$$

Вспомогательные,
|e1|, |e2|, L ≤ M

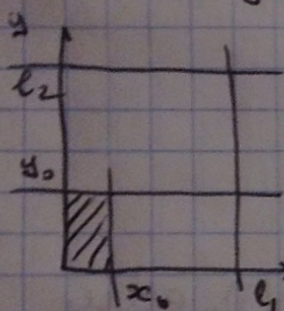
Определим:

$$U(x, y) \leq M \int_0^x \int_0^y [U(\xi, \eta) + V(\xi, \eta) + W(\xi, \eta)] d\eta d\xi$$

Аналогично:

$$V(x, y) \leq M \int_0^y [U(x, \eta) + V(x, \eta) + W(x, \eta)] d\eta$$

$$W(x, y) \leq M \int_0^x [U(\xi, y) + V(\xi, y) + W(\xi, y)] d\xi$$



// Будем дока-ть, что эти функции равны в нрлыз.-ке

Возьмём x_0, y_0 : $\exists x_0, y_0 < 1$
 $\exists x_0, M < 1$
 $\exists y_0, M < 1$

$$\bar{U} = \max_{Q_{x_0 y_0}} U(x, y), \quad \bar{V} = \max_{Q_{x_0 y_0}} V(x, y), \quad \bar{W} = \max_{Q_{x_0 y_0}} W(x, y)$$

Эти 3 макс-а м/б равны как-то упрощаемся, но одно у нас неопределённое $\Rightarrow$

$$\exists \bar{U} \geq \bar{V}, \bar{U} \geq \bar{W} \rightarrow U(x, y) \leq M \int_0^x \int_0^y 3 \bar{U} d\eta d\xi \leq 3M \bar{U} x_0 y_0$$

(x, y - нрлыз, но все в $Q_{x_0 y_0}$)

$$U(x, y) \leq 3M x_0 y_0 \bar{U} \quad \forall (x, y) \in Q_{x_0 y_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{U} \leq \underbrace{3M x_0 y_0}_{< 1} \Rightarrow \bar{U} = 0$$

$$\exists \bar{W} \geq \bar{U}, \bar{W} \geq \bar{V}$$

$$W(x, y) \leq M \int_0^x 3 \bar{W} d\xi \leq M \cdot \bar{W} \cdot 3 x_0$$

$$W(x, y) \leq 3M x_0 \bar{W}$$

$$\Rightarrow \bar{W} \leq \underbrace{3M x_0}_{< 1} \bar{W} \Rightarrow \bar{W} = 0$$

$$\text{Аналогично } \bar{V} = 0$$

$$\begin{aligned}
 W(x, y) &\leq M \int_{x_0}^x [V(\xi, y) + V(\xi, y) + W(\xi, y)] d\xi \\
 V(x, y) &\leq M \int_{y_0}^y [V(x, \eta) + V(x, \eta) + W(x, \eta)] d\eta \\
 U(x, y) &\leq M \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y [V(\xi, \eta) + V(\xi, \eta) + W(\xi, \eta)] d\eta d\xi
 \end{aligned}$$

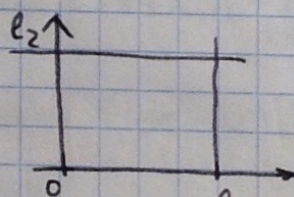
Поведём по x .

Возьмём x_1, y_0 : $3M(x_1 - x_0)y_0 < 1$, $3M(x_1 - x_0) < 1$, $3My_0 < 1$
 $\Rightarrow$ аналогично в прямоугольнике $Q(x_1, y_0)$ $f(x, y)$: $x \in [x_0, x_1]$, $y \in [0, y_0]$
 $\Rightarrow$ док-ся аналогично.

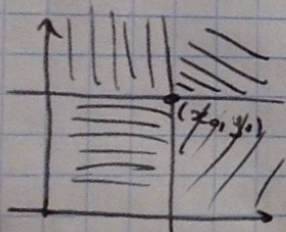
Поведём таким образом по $x \Rightarrow$ поднимись на новый уровень $y \Rightarrow$ за конечное число шагов пройдёмся везде $\Rightarrow$ док-во. ■

Замечание

Мы рассматриваем



Возьмём (.) (x_0, y_0) и проведём характеристики



Док-во не зависит от того, в какой мы области (|||, ≡, ||/, ||). Замечной мы можем попасть куда нам надо.

30) Сопрежённый дифференциальный оператор. Примеры.

А $u(x_1, \dots, x_n) \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$

А Дифф-ый оператор 2-го порядка:

$$L[u] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\bar{x}) u$$

$$a_{ij} \in C^2(\Omega), b_i \in C^1(\Omega), c \in C(\Omega) \quad (a_{ij}(\bar{x}) = a_{ji}(\bar{x}), i.k. \quad u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}).$$

• Теперь определим Сопрежённый дифференциальный оператор (сопрг. по Лагранжу, формально сопр. и т.д.)

$$\delta \in C^2(\Omega), \delta(x_1, \dots, x_n) \equiv \delta(\bar{x})$$

$$M[\delta] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}(\bar{x}) \delta(\bar{x})) - \sum_{i=1}^n (b_i(\bar{x}) \cdot \delta(\bar{x})) + c(\bar{x}) \cdot \delta(\bar{x})$$

Опр $L[u]$ наз-ся самосопр., если $L[u] = M[u] \quad \forall u \in C^2(\Omega)$

Пример 1

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{Возьмём оператор Лапласа } L[u] = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

$$L[u] = M[u] \quad (\text{т.к. } a_{ij}(\bar{x}) \equiv 1)$$

Пример 2 Не самосопр.

$$\Delta u + b u_{x_1}, \quad b \neq 0$$

$$M[u] = \Delta u - b u_{x_1}$$

Пример 3 Упр-е распр-е тенз в нр-ве

$$u_t = \operatorname{div} K \operatorname{grad} u + f$$

Забудем про время t

$$u(x_1, x_2, x_3)$$

$$L[u] = \operatorname{div} K(x_1, x_2, x_3) \operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cdot K(\bar{x}) + \frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

$$M[u] = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (k(x)u(x)) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial k}{\partial x_1} u \right) + \dots$$

30.2

Надо док-то, что они равны и для любой

(покажем только, что для x_1 и x_2 и x_3 аналогично)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial k}{\partial x_1} u + k \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 k}{\partial x_1^2} u - \frac{\partial k}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} =$$

$$= \frac{\partial^2 k}{\partial x_1^2} u + \frac{\partial k}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial k}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 k}{\partial x_1^2} u - \frac{\partial k}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

$$\Rightarrow L[u] = M[u].$$

Это пример оп-ра с перемен. коэф., но u и u этом самосопр.

$$L[u] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\bar{x}) u$$

$$u(x_1, \dots, x_n)$$

$$M[u] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}(\bar{x}) \delta) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i \delta) + c(\bar{x}) \delta$$

• Док-м, что

$$\delta L[u] - u M[\delta] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_i}, \text{ где}$$

$$p_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n [\delta a_{ij} u_{x_j} - u (a_{ij} \delta)_{x_j}] + b_i u \delta$$

доп-м как u и δ - 2-х функции, а не 3

► Проверим непосредственно $\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_i}$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\delta a_{ij} u_{x_i x_j} + (\delta a_{ij})_{x_i} u_{x_j} - u_{x_j} (a_{ij} \delta)_{x_i} - u (a_{ij} \delta)_{x_i x_j}] + \sum_{i=1}^n [u_{x_i} b_i \delta + u (b_i \delta)_{x_i}] + \overset{0}{c u \delta} - \underline{c u \delta} \quad \textcircled{=}$$

$$\sim -\delta L[u]$$

$$= u M[\delta]$$

$$\textcircled{=} \delta L[u] - u M[\delta]$$

$$\underline{\quad}: \Delta (\delta a_{ij})_{x_i} u_{x_j} - u_{x_j} (a_{ij} \delta)_{x_i} = 0 \quad \text{т.к.}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{x_i} (a_{ij} \delta)_{x_j} \overset{\text{меняем местами}}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{x_j} (a_{ji} \delta)_{x_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{x_j} (a_{ij} \delta)_{x_i}$$

Если для $\forall u, \delta$ выполнено:

30.3

$(Au, \delta) = (u, A^* \delta)$, то A^* -с сопр. для A .

$\Gamma \mathbb{R}^3 u(x_1, x_2, x_3)$

Γ есть одн-па Ω , оф Σ

$\Gamma u, \delta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$

дважды напр $\partial u / \partial n_2$ в замкнутом и на фронтальной
область. в том

$$\Gamma (u, \delta) = \int_{\Omega} u \delta d\tau$$

• Хотим док-ть, что $(Lu, \delta) = (u, M\delta) \quad \forall u, \delta$

► Надо док-ть, что $(Lu, \delta) - (u, M\delta) = 0$

$$(Lu, \delta) - (u, M\delta) = \int_{\Omega} [u Lu - u M\delta] d\tau \stackrel{(*)}{=} =$$

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \right] d\tau \stackrel{(**)}{=} 0$$

— дифференциал этой векторной гр-ны

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$$

$$\Rightarrow \stackrel{(**)}{=} \int_{\Sigma} (\vec{p}, \vec{n}) d\sigma = 0$$

т.к. $\vec{p}$ обязательно вносится в сдвиг либо δ , либо u .
в каком виде, а они на пов-ти $= 0$

В соответствии с определением запишем:

$$L[u] = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u$$

$$M[\delta] = \delta_{xy} - (a\delta)_x - (b\delta)_y + c(x, y)\delta$$

$$(i=1) \quad p_1(x, y) = \sum_{j=1}^2 [\delta a_{1j} u_{x_j} - u(a_{1j}\delta) x_j] + b_2 u \delta$$

$$a_{11} = a_{22} = 0 \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}$$

$$\text{т.е. } p_1(x, y) = \frac{1}{2} (\delta u_y - u \delta_y) + a u \delta$$

$$\text{аналог. } p_2(x, y) = \frac{1}{2} (\delta u_x - u \delta_x) + b u \delta$$

Кривая $y=f(x)$, e . На ней задан $u(x,y)$

30.4

$e \nearrow y=f(x)$

$$u(x,y)|_e = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)|_e = \psi(x)$$

Если это известно, то на ней знаем значение частных производных

$$\vec{r} = \{1, f'(x)\}$$

$$\vec{n} = \{f'(x), -1\}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\vec{r}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot f'(x) \quad (\text{прямая дир. и поуг. но не обратн.})$$

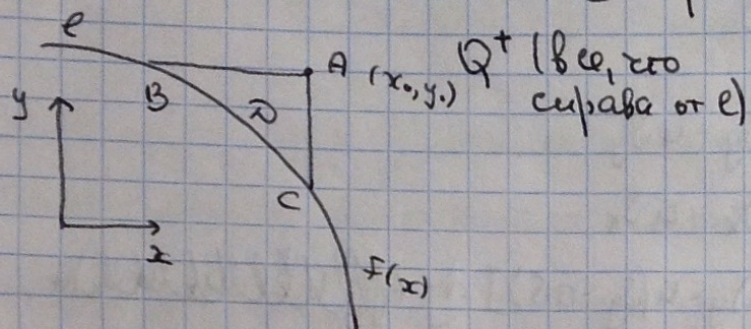
$$\frac{du}{d\vec{r}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot f'(x) = \frac{d}{dx}(u(x, f(x))) = \frac{d}{dx}(\varphi(x)) = \varphi'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot f'(x) - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot 1 = \psi(x)$$

т.е. если мы знаем значение φ -и и ψ -и на кривой, то мы знаем частную производную.

31) Метод Римана

У нас есть какая-то кривая Γ , определённая ур-ием $f(x)$



$$f'(x) < 0$$

$$\Gamma: [x, f(x)]$$

Рассм. такую задачу:

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = F(x, y) \text{ в } Q^+$$

(это гиперболич. тип, т.к. есть u_{xy})

a, b ввиду невр. дифф.

c, F - невр.

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \psi(x)$$

$$(1) \int u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = F(x, y) \text{ в } Q^+$$

$$(2) u|_{\Gamma} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \psi(x)$$

Э

Задача довольно сложная, проув. коэф, проув. ^{кривая} ~~прямая~~ и т.п. Мы хотим получить ф-лу для решения этой задачи.

• $u \in C^2$ и явл. реш. задачи (1), (2)

Возьмём проув. (.) (x, y) в Q^+ , провед. прямые, паралл. осем. Полученная область - D .

Возьмём проув. ф-ию $S \in C^2$

$$\text{Вводим оператор } L[u] = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u$$

$$(1): L[u] = F$$

$$\iint_D (S L[u] - u M[S]) dS = \iint_D \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) dS = \left(\begin{array}{l} \text{прим. ф-лу} \\ \text{Грина} \\ \text{переходим к} \\ \text{линейной координате} \end{array} \right)$$

$$= \int_{\partial D} (p_1 dy - p_2 dx) = \int_B^A (p_1 dy - p_2 dx) + \int_C^A p_1 dy - \int_A^B p_2 dx \quad (\equiv)$$

$C \left(\frac{dx=0}{dy=1} \right) \quad A \left(dy=0, dx=1 \right)$

$$\equiv \int_B (p_1 dy - p_2 dx) + \int_C^A \left[\frac{1}{2} (\delta u_y - u \delta y) + a u \delta \right] dy + \boxed{31.2}$$

знаем из этого
высоте кривой u .

$$+ \int_B^A \left[\frac{1}{2} (\delta u_x - u \delta x) + b u \delta \right] dx \equiv$$

$$\cdot \frac{1}{2} \delta u_y - \frac{1}{2} u \delta y = \frac{1}{2} (\delta u)_y - u \delta y$$

$$\cdot \frac{1}{2} \delta u_x - \frac{1}{2} u \delta x = \frac{1}{2} (\delta u)_x - u \delta x$$

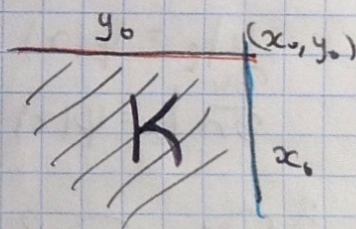
$$\equiv \int_B^C (p_1 dy - p_2 dx) + \int_C^A \left[\frac{1}{2} (\delta u)_y - u (\delta y - a \delta) \right] dy + \int_B^A \left[\frac{1}{2} (\delta u)_x - u (\delta x - b \delta) \right] dx$$

$$\iint_D (\delta L[u] - u \delta S) dS = \int_B^C (p_1 dy - p_2 dx) + \int_C^A \left[\frac{1}{2} (\delta u)_y - u (\delta y - a \delta) \right] dy + \int_B^A \left[\frac{1}{2} (\delta u)_x - u (\delta x - b \delta) \right] dx$$

Функция δ имеет произвольную. Теперь определим
ф-ию δ :

$$M \delta = 0, \text{ т.е. } \delta_{xy} - (a \delta)_x - (b \delta)_y + c \delta = 0$$

Сотнем кривые для δ заданы в K



$$a) \delta(x_0, y) = \exp \left\{ \int_{y_0}^y a(x_0, \eta) d\eta \right\}, y \leq y_0$$

$$b) \delta(x, y_0) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x b(\xi, y_0) d\xi \right\}, x \leq x_0$$

$$x = x_0$$

$$y = y_0$$

характеристики, а из них задано вполне
конкр. значение. Из них решение δ !

$$*) \delta(x_0, y) - \text{решение } y \text{ при } \delta_y - a \delta = 0, x = x_0$$

$$b) \delta(x, y_0) - \text{решение } \delta_x - b \delta = 0, y = y_0$$

При этом $\delta(x_0, y_0) = 1$. Такая нормировка

т.е. мы выбрали вполне опред. образом ф-ию δ .

Что нам это даёт? Вот это т.е. получим:

$$\iint_D \delta F dS = \int_B^C (p_1 dy - p_2 dx) + \frac{1}{2} \delta(A) u(A) - \frac{1}{2} \delta(B) u(B) + \frac{1}{2} \delta(A) u(A) - \frac{1}{2} \delta(B) u(B).$$

$$\delta(A) = 1 \text{ (у нормировки)}$$

$$\Rightarrow \iint_D \delta F dS = \int_B^c (p_1 dy - p_2 dx) + \underbrace{\frac{1}{2} \delta(A) u(A) - \frac{1}{2} \delta(c) u(c) - \frac{1}{2} \delta(B) u(B)}_{=1} u(x_0, y_0) \quad \boxed{313}$$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \delta(c) u(c) + \frac{1}{2} \delta(B) u(B) - \int_B^c (p_1 dy - p_2 dx) + \iint_D \delta F dS.$$

Вывели ф-лу в предположении, что решение задачи $\exists$.
Нам никто не мешает считать x_0, y_0 произв. и дока-ть,
что реш. $\exists$.

Такое построение решения для такой общей задачи -
метод Римана.

$$L[u] = u_{xy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u$$

$$M[\delta] = \delta_{xy} - (a\delta)_x - (b\delta)_y + c(x, y)\delta$$

$$i=1, j=1,2 \quad p_1(x, y) = \sum_{j=1}^2 [\delta a_{ij} u_{x_j} - u(a_{ij} \delta) x_j] + b_1 u \delta, \quad a_{11}=a_{22}=0, a_{12}=a_{21}=\frac{1}{2}, b_1=a, b_2=b, c=c$$

$$// p_i(x, y) = \sum_{j=1}^n [\delta a_{ij} u_{x_j} - u(a_{ij} \delta) x_j] + b_i u \delta$$

$$p_1(x, y) = \frac{1}{2} (\delta u_y - u \delta_y) + a u \delta.$$

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2} (\delta u_x - u \delta_x) + b u \delta.$$

Уравнения математической физики 2 поток 2015 год

1. Классификация уравнений с частными производными второго порядка.
2. Вывод уравнения теплопроводности в пространстве.
3. Уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной. Постановка основных задач.
4. Метод разделения переменных для доказательства существования решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.
5. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
6. Единственность и устойчивость решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.
7. Единственность решения общей краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
8. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
9. Существование решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
10. Метод продолжения решения первой и второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой.
11. Интегральное представление решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.
12. Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка основных задач. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.
13. 1 и 2 формулы Грина. 3 (основная) формула Грина.
14. Свойства гармонических функций.
15. Принцип максимума для гармонических функций.
16. Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
17. Единственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа и необходимое условие ее разрешимости.
18. Единственность решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двух и трехмерном случаях.
19. Свойства функции Грина для задачи Дирихле.
20. Потенциалы простого и двойного слоя. Потенциал двойного слоя с единичной плотностью.
21. Сведение внутренней задачи Дирихле к интегральному уравнению Фредгольма 2 рода.
22. Существование решения внутренней задачи Дирихле.
23. Уравнение колебаний. Постановка основных задач.
24. Формула Даламбера. Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши для уравнения колебаний.
25. Метод разделения переменных для доказательства существования решения первой краевой задачи для уравнения колебаний.
26. Интеграл энергии. Теоремы единственности решения краевых задач для уравнения колебаний.
27. Задача с данными на характеристиках. Эквивалентная система интегральных уравнений.
28. Существование решения задачи с данными на характеристиках.
29. Единственность решения задачи с данными на характеристиках.
30. Сопряженный дифференциальный оператор. Примеры.
31. Метод Римана.